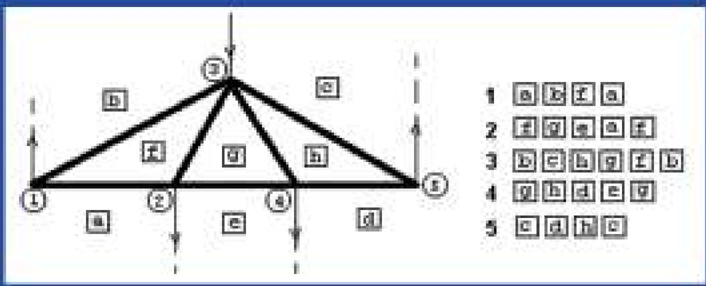
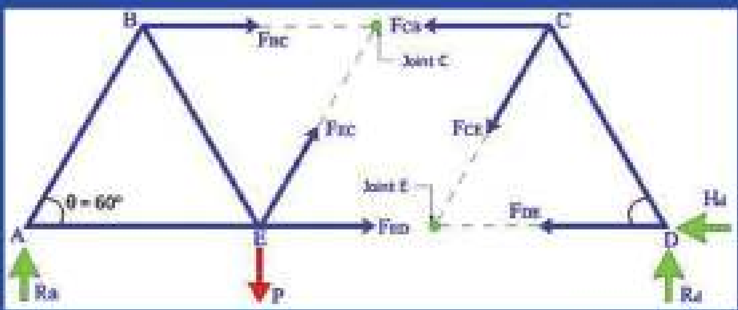
க.பொ.த. (உயர்தரம்)

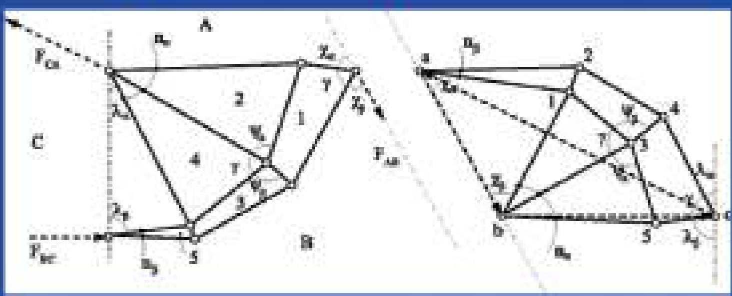
இணைந்த கணிதம்
நிலையியல் - II

மேலதிக வாசிப்புத் துணைநூல்

(2017 ஆம் ஆண்டிலிருந்து நடைமுறைப்படுத்தப்படும் புதிய பாடத்திட்டத்திற்கு அமைவாகத் தயாரிக்கப்பட்டது)







வெளியீடு
கணிதத்துறை
விஞ்ஞான தொழிநுட்ப பீடம்
தேசிய கல்வி நிறுவகம்
இலங்கை
www.nie.lk

க.பொ.த. (உயர்தரம்)
இணைந்த கணிதம்

நிலையியல்

பகுதி II

மேலதிக வாசிப்புத் துணைநூல்

வெளியீடு
கணிதத்துறை
விஞ்ஞான தொழிநுட்ப பீடம்
தேசிய கல்வி நிறுவகம்
மகரகம

இணைந்த கணிதம்
நிலையியல் - பகுதி II
மேலதிக வாசிப்புத் துணைநூல்
முதற்பதிப்பு - 2018

வெளியீடு:
கணிதத்துறை
விஞ்ஞான தொழினுட்ப பீடம்
தேசிய கல்வி நிறுவகம்
மகரகம, இலங்கை

இணையத்தளம் : *www.nie.lk*

பதிப்பு: அச்சகம்,
தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

பணிப்பாளர் நாயகத்தின் செய்தி

கணிதக் கல்வியை விருத்தி செய்வதற்காக தேசிய கல்வி நிறுவகத்தின் கணிதத் துறையினால் காலத்துக்கேற்ப பல்வேறு செயற்பாடுகள் முன்னெடுக்கப்படுகின்றது. ''**நிலையியல் - பகுதி II**'' எனும் பெயரில் எழுதப்பட்ட இந்த நூல் இதன் ஓர் வெளிப்பாடாகும்.

தரங்கள் 12, 13க்குரிய பாடத்திட்டத்தினை கற்ற பின் நடைபெறும் கல்வி பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர்தர) பரீட்சைக்கு மாணவர்களைத் தயார்ப்படுத்துவது ஆசிரியரின் பிரதான காரியமாகும். இதற்குப் பொருத்தமான மதிப்பீட்டுக் கருவிகள் மிகக் குறைவாகவே உள்ளது. வியாபார நிலையங்களில் உள்ள அநேகமான கருவிகள் பொருத்தப்பாட்டிலும் தரத்திலும் குறைவான வினாக்களைக் கொண்டிருப்பது இரகசியமல்ல. இந்த நிலைமையை மாற்றி மாணவர்கள் பரீட்சைக்கு நன்றாகத் தயாராகும் வகையில் தேசிய கல்வி நிறுவகத்தின் கணிதத் துறையினால் இந்தப் ''**நிலையியல் - பகுதி II**'' என்ற நூல் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த நூல் பாடத்திட்டத்துக்கேற்ப உருவாக்கப்பட்ட பெறுமதிமிக்க வாசிப்புத் துணைநூல் ஆகும். செய்து காட்டப்பட்ட உதாரணங்கள் உள்ளடக்கப்பட்டிருப்பது ஆசிரியர்களுக்கும் மாணவர்களுக்கும் மிகவும் பயனுள்ளதாக அமையும்.

இந்த நூலை பயன்படுத்துவதன் மூலம் கணித பாடத்தின் கற்றல் - கற்பித்தல் செயற்பாட்டினைத் திறம்படச் செய்யுமாறு ஆசிரியர்களிடமும் மாணவர்களிடமும் கேட்டுக் கொள்கின்றேன். ''**நிலையியல் - பகுதி II**'' என்ற நூலை உங்கள் கைசேர வைப்பதற்கு அனுசரணை வழங்கிய Aus Aid செயற்றிட்டத்துக்கும் இதனைத் திறம்படச் செய்வதற்கு வளவாளர்களாகப் பணிபுரிந்த கணிதத் துறையின் செயற்குழுவினருக்கும் வெளிவாரி வளவாளர்களுக்கும் எனது நன்றியைத் தெரிவித்துக் கொள்கின்றேன்.

கலாநிதி (திருமதி) ரி. ஏ. ஆர். ஜே. குணசேகர
பணிப்பாளர் நாயகம்
தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

பணிப்பாளரின் செய்தி

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர்தர) பாடப் பரப்புக்களில் கணிதப் பாடப்பரப்புக்கு விசேட இடம் உரித்தாகும். கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (சாதாரண தர) பரீட்சையில் உயர் மட்டத்தில் சித்தியடையும் மாணவர்கள் விசேடமாக கணித பாடப் பரப்பை விரும்புகின்றனர். நாட்டுக்கும் உலகிற்கும் ஏற்ற புதிய உற்பத்திகள் உருவாகுவதற்கு காரணமாக இருந்த நிபுணர்களை உருவாக்கியது கணித பாடப் பரப்பை கற்ற மாணவர்கள் என்பதை கடந்த காலம் சாட்சி பகர்கின்றது.

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர்தர) கணித பாடங்களுக்கு பாடத்திட்டத்தை தயாரித்திருப்பது விஞ்ஞான உலகிற்கு, தொழினுட்ப உலகிற்கு மற்றும் வேலை உலகிற்கு தேவையான வித்துனர்களை உருவாக்கும் நோக்கத்தில் ஆகும்.

2017 ஆம் ஆண்டிலிருந்து உயர்தர இணைந்த கணிதம் மற்றும் உயர்தர கணித பாடங்களுக்கு மீளமைக்கப்பட்ட புதிய பாடத்திட்டம் நடைமுறைப்படுத்தப்படுகின்றது. இந்த பாடங்களைக் கற்கும் மாணவ மாணவியரின் கற்றலை இலகுவாக்குவதற்கு ''**நிலையியல்- பகுதி I, பகுதி II**" எனும் மேலதிக வாசிப்புத் துணைநூல்கள் தேசிய கல்வி நிறுவகத்தின் கணிதத் துறையினால் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த நூலில் உள்ள பயிற்சிகள் மாணவர்களின் எண்ணக்கரு அடைவு மட்டத்தை அளந்து பார்க்கவும் எதிர்காலத்தில் நடைபெறும் கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர்தர) பரீட்சைக்கு ஆயத்தமாவதற்கு பொருத்தமானதாகவும் அமைந்துள்ளது. வினாவுக்குரிய விடையை பெற்றுக் கொடுப்பதன் மூலம் மாணவ மாணவிகள் வினா ஒன்றுக்கு விடையளிக்கும்போது பின்பற்ற வேண்டிய படிமுறைகள் மற்றும் முறைமை தொடர்பான அனுபவத்தைப் பெற்றுக் கொடுப்பது எதிர்பார்க்கப்படுகின்றது. அதன் மூலம் விடையை ஒழுங்குபடுத்த வேண்டிய முறை தொடர்பாக மாணவர்கள் தங்கள் ஆற்றல், திறன் மற்றும் அறிவை விருத்தி செய்வதற்கு முடிகின்றது. இந்த வாசிப்புத் துணைநூல்களைத் தயாரிப்பதற்கு நிபுணத்துவம் கொண்ட ஆசிரியர்கள் மற்றும் பாடத்திட்ட நிபுணர்களின் வளப் பங்களிப்பு பெறப்பட்டுள்ளது.

மேலும் இந்த வினாக்களைத் தயாரிக்கும்போது ஒவ்வொரு பாட உள்ளடக்கத்திலும் பல்வேறு கோணங்களில் மாணவ மாணவிகளின் அவதானத்தைச் செலுத்தவும். மாணவர்களின் அறிவை விரிவுபடுத்திக் கொள்ளும் சந்தர்ப்பத்தைப் பெற்றுக் கொடுக்க, வழிகாட்ட கவனம் செலுத்தப்பட்டுள்ளது. ஆசிரியர்களின் அறிவுறுத்தல்கள் மற்றும் வழிகாட்டலின் கீழ் சுயமாகக் கற்பதற்கு உகந்ததாக இந்த நூல் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

இவ்வாறான பெறுமதிமிக்க நூலை உருவாக்குவதற்கு ஆலோசனையும் வழிகாட்டலையும் வழங்கிய தேசிய கல்வி நிறுவகத்தின் பணிப்பாளர் நாயகத்துக்கும் வளவாளர்களாகச் செயற்பட்ட அனைவருக்கும் எனது நன்றியைத் தெரிவித்துக் கொள்கின்றேன். இந்த நூலைப் பயன்படுத்தி அதன் மூலம் பெற்றுக் கொள்ளும் அனுபவத்தின் மூலம் மீள்பதிப்புக்கு பயன்படுத்தக்கூடிய பெறுமதியான நேர்கருத்துக்களை எங்களுக்குப் பெற்றுத் தருமாறு கேட்டுக் கொள்கின்றேன்.

கே. ரஞ்சித் பத்மசிரி
பணிப்பாளர்
கணிதத்துறை
தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

கலைத் திட்டக் குழு

ஆலோசனையும் வழிக்காட்டலும் : **கலாநிதி (திருமதி) ரி. ஏ. ஆர். ஜே. குணசேகர**
பணிப்பாளர் நாயகம்
தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

மேற்பார்வை : **திரு. கே.ஆர். பத்மசிரி**
பணிப்பாளர்
கணிதத் துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

திட்டமிடலும் இணைப்பாக்கமும் : **திரு. எஸ். இராஜேந்திரம்**
சிரேஷ்ட விரிவுரையாளர்,
க.பொ.த உயர்தர பாடத்திட்ட குழுத்தலைவர்,
கணிதத் துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

உள்வாரி வளவாளர்கள் :

திரு. ஜி. பி. எச். ஜகத்குமார	சிரேட்ட விரிவுரையாளர், கணிதத் துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.
திருமதி. எம். நில்மினி பி. பீரிஸ்	சிரேட்ட விரிவுரையாளர், கணிதத் துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.
திரு. எஸ். இராஜேந்திரம்	சிரேட்ட விரிவுரையாளர், கணிதத் துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.
திரு. க. சுதேசன்	உதவி விரிவுரையாளர், கணிதத் துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.
திரு. பி. விஜய்குமார்	உதவி விரிவுரையாளர், கணிதத் துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.
செல்வி.கே.கே. வஜிமா எஸ். கங்கானங்கே	உதவி விரிவுரையாளர், கணிதத் துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

வெளிவாரி வளவாளர்கள் :

திரு. க. கணேசலிங்கம்	-	ஓய்வுபெற்ற பிரதம செயற்திட்ட அதிகாரி, கணிதத்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.
திரு. ந. சிதம்பரநாதன்	-	ஓய்வு பெற்ற ஆசிரியர்
திரு. க. பாலதாசன்	-	ஓய்வு பெற்ற கணித பாட உதவிக் கல்விப் பணிப்பாளர்.
திரு. வி. ராஜரட்ணம்	-	ஓய்வு பெற்ற ஆசிரியர்
திரு. எஸ். ஜீ. தொலுவீர	-	ஆசிரியர், உவெஸ்லிக் கல்லூரி, கொழும்பு - 08.
திரு. சலங்க பெர்னான்டோ	-	ஆசிரியர், விவேகானந்தா கல்லூரி, கொழும்பு - 13
திரு. என். சகபந்து	-	ஓய்வு பெற்ற ஆசிரியர்
திரு. கே. இரவீந்திரன்	-	ஓய்வு பெற்ற பிரதி அதிபர்
திரு. ஜி. எச். அசோகா	-	ஆசிரியர், இராகுல கல்லூரி, மாத்தறை.

மொழிச் செம்மையாக்கம் : **திரு. வி. முத்துக்குமாரசுவாமி**
ஓய்வுபெற்ற அதிபர்.

வெளியீடும் மேற்பார்வையும் : **திரு. டபிள்யு. எம். யு. விஜேசூரிய**
பணிப்பாளர்
வெளியீட்டுத் துறை.

கணினிப் பதிப்பும் வடிவமைப்பும் : **செல்வி. கமலவேணி கந்தையா**
அச்சகம், தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

அட்டைப்பட வடிவமைப்பு : **திருமதி. கே. டி. அனுஷா தரங்கனி**
அச்சகம், தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

உதவியாளர்கள் : **திரு. எஸ். கெட்டியாராய்ச்சி**
கணிதத்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

திருமதி. கே. என். சேனானி
கணிதத்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

திரு. ஆர். எம். ரூபசிங்ஹ
கணிதத்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

அறிமுகம்

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர்தர) வகுப்புக்களில் இணைந்த கணிதப் பாடத்தைக் கற்கும் மாணவர்கள் பயிற்சி பெறும் முகமாக இந்நூல் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. மாணவர்களுக்கு போதிய பயிற்சிகளை வழங்குமுகமாகவும், பாடப்பரப்பினை சுயமாகக் கற்று பரீட்சைக்குத் தயாராகுவதற்கான ஓர் மேலதிக வாசிப்புத் துணைநூலாக இந்நூல் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. இது ஓர் மாதிரி வினாத்தாள் தொகுதி அன்று என்பதையும் சுயகற்றலுக்கான அல்லது தவறவிட்டவற்றை மீளக் கற்பதற்கான ஓர் துணைநூல் என்பதையும் மாணவர்களும் ஆசிரியர்களும் விளங்கிக் கொள்ள வேண்டும்.

இவ் வாசிப்புத் துணைநூலில் தரப்பட்டுள்ள உதாரணங்களில் காணப்படும் வினாக்களைச் செய்த பின்னர் அவற்றிற்கு வழங்கப்பட்டுள்ள விடைகளை தமது விடைகளுடன் மாணவர்கள் ஒப்பிட்டு நோக்க முடியும் என்பதும் இங்கு தரப்பட்டவாறே அத்தனை படிமுறைகளையும் உள்ளடக்கியவாறு மாணவர்களது விடைகள் இருக்க வேண்டும் என்பது அவசியமன்று. உங்களது விடைகளைச் சரிபார்ப்பதற்கும் படிமுறைகளை சரியாகப் பின்பற்றுவதற்காகவுமான வழிகாட்டல்களாகவே இங்கு விடைகள் தரப்பட்டுள்ளன என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவும்.

இந் ''**நிலையியல் - பகுதி II**'' நூலானது 2017 முதல் நடைமுறைக்கு வந்துள்ள மீள்நோக்கித் திருத்தப்பட்டுள்ள பாடத்திட்டத்திற்கு அமைவாக 2019 ஆம் ஆண்டு முதன் முதலாக க.பொ.த (உயர்தரம்) பரீட்சைக்குத் தோற்றும் மாணவர்களை இலக்காகக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. ஆயினும் உயர் கணிதத்தைக் கற்கும் மாணவர்களும் தமக்குரிய பாடப்பரப்புகளுக்குரியவாறான வினாக்களைப் பயன்படுத்த முடியும்.

தேசிய கல்வி நிறுவக கணிதத் துறையினரால் வெளியிடப்பட்ட க.பொ.த (உயர்தரம்) இற்கான முதலாவது ''**பயிற்சி வினாக்கள் விடைகளுடன்**'', ''**நிலையியல் I**'' என்ற நூல்களைத் தொடர்ந்து ''**நிலையியல் II**'' எனும் புத்தகம் வெளியிடப்படுகின்றது. இதன் தொடர்ச்சியாக இணைந்த கணிதம் I, இணைந்த கணிதம் II அலகு ரீதியான பயிற்சி வினாத்தொகுதியும் விரைவில் வெளியிடப்படும். இப்புத்தகங்களிலுள்ள குறைகளையும் நலிவுகளையும் சுட்டிக் காட்டுவீர்களாயின் அது எமது வெளியீடுகளைத் திருத்தியமைக்க உதவும் என்பதுடன் உங்களது கருத்துக்களை மிகவும் பெறுமதி வாய்ந்தவையாக மதிக்கின்றோம் என்பதையும் உங்களுக்கு அறியத்தருகின்றோம்.

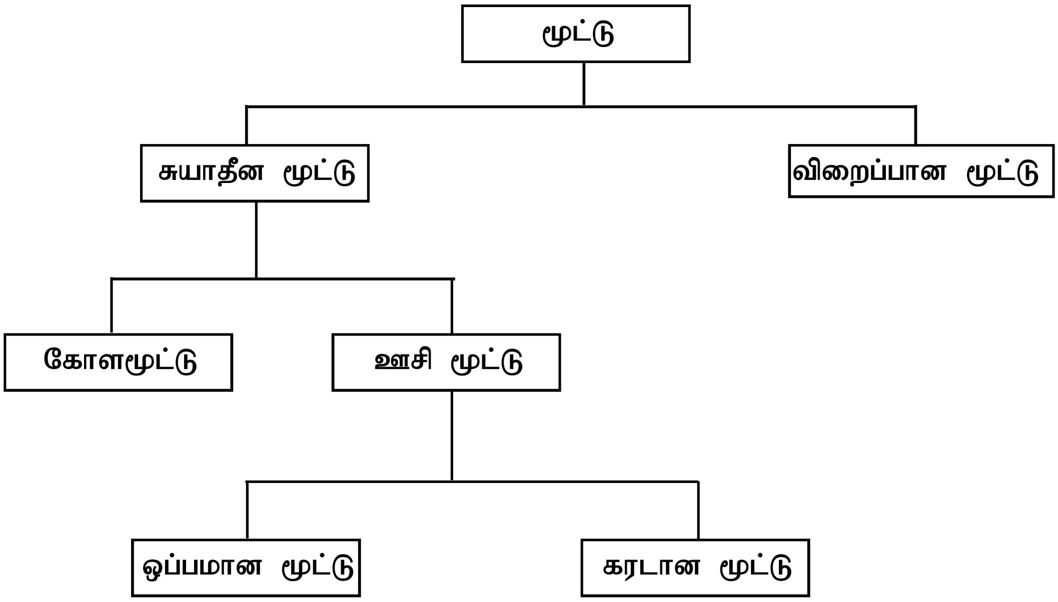
திரு. எஸ். இராஜேந்திரம்
செயற்றிட்ட குழுத் தலைவர்
(தரம் 12, 13 கணிதம்)
தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

உள்ளடக்கம்

5.0 மூட்டிய கோல்கள்

5.1 எளிய மூட்டுகளின் வகைகள்

பல்வேறு உடல்கள் மூட்டப்படும்போது நாம் பயன்படுத்தும் முக்கிய மூட்டு வகைகளைப் பின்வருமாறு வகைப்படுத்தலாம்.

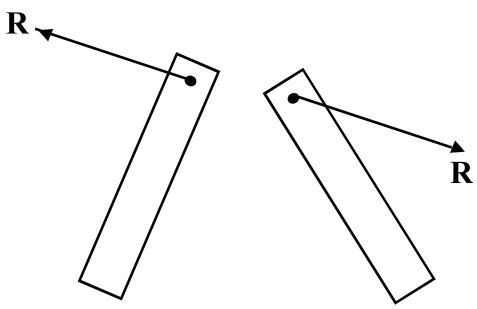


5.2 விறைப்பான மூட்டு

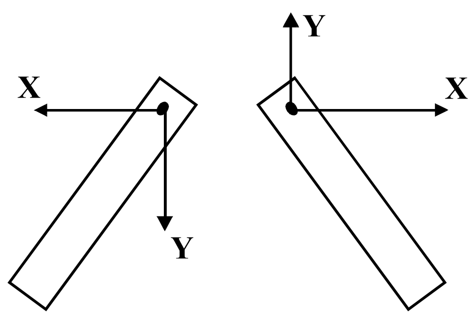
இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட உடல்களை ஒன்றுடனொன்று மூட்டுவதனால் பெறப்படும் தனிஉடலின் வடிவத்தை புறவிசைகளினால் மாற்றமுடியாது எனில் அம்மூட்டு விறைப்பான மூட்டு எனப்படும்.

சுயாதீன மூட்டொன்றில் விசைகள் (ஊசி மூட்டு)

ஒவ்வொரு கோலின்மீது மற்றைய கோல் தாக்கும் விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று சமனாகவும் எதிராகவும் இருக்கும்.



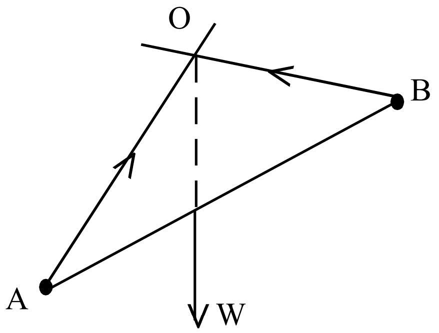
இலகுவாகக் கணிப்பதற்காகவே இவ் விசைகள் படத்தில் காட்டியவாறு X, Y எனும் கிடை, நிலைக்குத்து விசைகளாகப் பிரிக்கப் படுகின்றது. இவ்விசைகளின் விளையுள் R ஆகும். இது ஊசி மூட்டினூடு செல்லும்.



இலேசான மூட்டு ஊசியானது உருளை வடிவான இலேசான ஒப்பமான ஊசியாகவும், இரு கோல்களினூடாகவும் கருதப்படலாம். ஊசியானது ஒப்பமானது என்பதால், தொடுபுள்ளியில் மறுதாக்கம் ஊசிக்கு செங்குத்தானதாகும். இவ் இரு விசைகளில் கீழ் ஊசியானது சமநிலையிலிருப்பதால் இவை ஒன்றுக்கொன்று சமனாவதுடன், எதிர்-எதிர் திசைகளிலும் ஒரே தாக்கக் கோட்டிலும் இருத்தல் வேண்டும்.

வசதிக்காக நாங்கள் இவ்விசைகளை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு திசைகளில் கூறாக்குகின்றோம்.

குறிப்பு: இரு பாரமான கோல்கள் அவற்றின் மூனைகளில் மூட்டப்படுகையில், மூட்டிலுள்ள மறுதாக்கம் கோல் வழியே இருக்கமாட்டாது. ஏனெனில் இங்கு கோல்கள் மூவிசைகளில் தாக்கத்தின் கீழ் சமநிலையிலிருக்கும்.



சமநிலைக்கு, விசைகள் ஒரு புள்ளி O வில் சந்திக்க வேண்டும். இவை AB வழியே இருக்க முடியாது.

கோல் இலேசானதாயின், இரு மறுதாக்கங்கள் மாத்திரம் தொழிற்படும். ஆகவே இவை கோல் வழியே இருந்தால் மாத்திரமே சமநிலை சாத்தியமாகும்.

சட்டப்படலானது அச்சொன்று பற்றி சமச்சீரானதாயின், சர்வசமனான விசைகள் இவ் அச்சின் இருபுறமும் தொழிற்படும்.

பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கான அறிவுறுத்தல்கள்

(i) சரியான வரைபடத்தை வரைவதோடு தரப்பட்ட கேத்திரகணித தரவுகளை அதன்மீது குறிக்கவேண்டும்.

(ii) தொகுதியில் தாக்கும் விசைகளைச் சரியாகக் குறித்தல் வேண்டும்.

(iii) தெரியாத விசைகளைக் காணவேண்டி இருப்பின் அதற்குப் போதுமான சமன்பாடுகளைப் பெறவேண்டும்.

(iv) மூட்டுக்களில் உள்ள மறுதாக்கங்கள் தொகுதியுடன் சம்பந்தப்பட்ட விசைகள் என்பவற்றைக் காண்பதற்கு மூட்டுக்களை வேறாக்கி விசைகளைக் குறிக்கவேண்டும். (சமச்சீர்க்கோடு காணப்படின் அதனோடு தொடர்பான இயல்புகளைப் பயன்படுத்துக.)

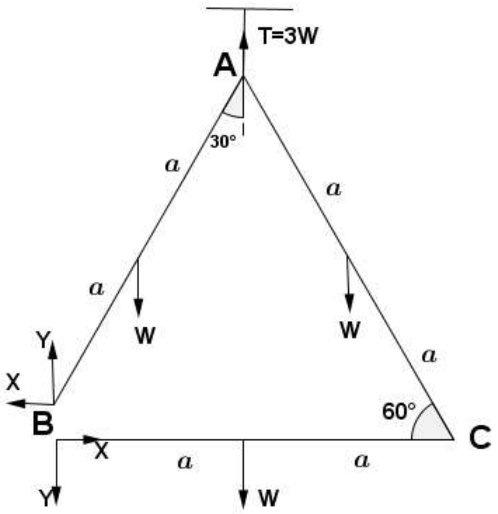
குறிப்பு: சட்டப்படலானது விறைப்பாக இருக்கவேண்டும். n மூட்டுக்களையுடைய சட்டப் படலானது $(n > 3)$ விறைப்பாக இருக்க, இது $(2n-3)$ எண்ணிக்கையுடைய கோல்களை கொண்டிருத்தல் அவசியமாகும்.

$(2n-3)$ இலும் அதிக எண்ணிக்கையுடைய கோல்களைக் கொண்ட சட்டப்பட லானது மேலதிக விறைப்பானது எனப்படும்.

5.3 செய்து காட்டப்பட்ட உதாரணங்கள்

உதாரணம் 1

ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் $2a$ நீளமும் கொண்ட மூன்று சீரான கோல்கள் அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு ABC எனும் சட்டப்படல் மூட்டு A இல் சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. B இல் AB மீதுள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.



கோல் BC இன் சமநிலையைக் கருத்திற் கொள்ளும்போது

BC கோலுக்கு C பற்றித் திருப்பம் எடுப்பதன் மூலம்

$$C) \quad W.a + Y.2a = 0$$

$$2Y + W = 0$$

$$Y = -\frac{W}{2}$$

கோல் AB இன் சமநிலையைக் கருத்திற்கொள்ளும்போது

AB கோலுக்கு A பற்றித் திருப்பம் எடுப்பதன் மூலம்

$$(A \quad Y(2a \sin 30°) + X(2a \cos 30°) - W(a \sin 30°) = 0$$

$$2Y + 2X \cot 30° = W$$

$$2Y + 2\sqrt{3}X = W$$

$$-W + 2\sqrt{3}X = W$$

$$X = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad = \sqrt{\frac{W^2}{3} + \frac{W^2}{4}}$$

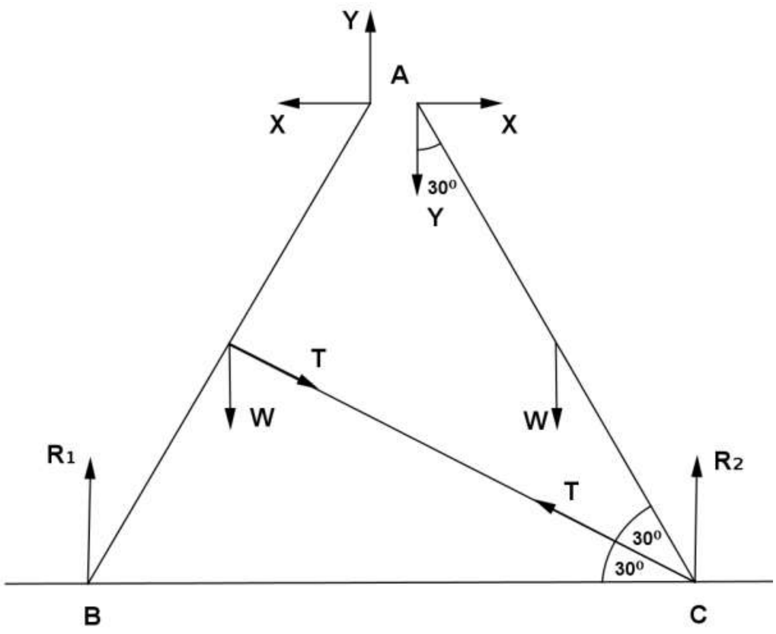
$$R = \sqrt{\frac{7}{12}}W$$

$$\tan\theta \;=\; \frac{Y}{X} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}\;; \qquad \therefore\; \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

B இல் AB மீதான மறுதாக்கத்தின் பருமன், $B = \sqrt{\frac{7}{12}}$ W; R ஆனது CB யுடன் ஆக்கும் கோணம் $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

உதாரணம் 2

ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளத்தில் சமமான W நிறையுள்ள AB, AC என்னும் இரு சீரான கோல்கள் A இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு, AB இன் நடுப்புள்ளியுடனும் C யுடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ள நீளா இழையொன்றின் மூலம் B, C முனைகள் ஒப்பமான கிடைத்தளமொன்றில் இருக்குமாறு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சமநிலையில் பேணப்படுகின்றது $B\hat{A}C = 60^0$ எனின் இழையின் இழுவையைக் கோலின் நிறையில் காண்க. மூட்டு A இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனைக் காண்க.



$AB = AC\;;\; B\hat{A}C = 60°$

$\therefore$ ABC ஓர் சமபக்க முக்கோணி.

AC இன் சமநிலைக்கு

$\uparrow\; R_1 + R_2 - 2W = 0$

$R_1 + R_2 = 2W$ .... ①

தொகுதிக்கு C

$$\overset{\curvearrowleft}{C}\quad -R_1 \,.\, 4a\cos 60^\circ + W \,.\, a\cos 60^\circ + W \,.\, 3a\cos 60^\circ = 0 \,......... \text{②}$$

$$R_1 = W$$

(1) இலிருந்து $R_2 = W$

கோல் AC இன் சமநிலைக்கு

$$\overset{\curvearrowleft}{A}\quad -T\cdot a + R_2\cdot 2a\cos 60^\circ - W\cdot a\cos 60^\circ = 0 \,.................. \text{③}$$

$$-T\cdot a + W\times 2a\times\frac{1}{2} - W\times\frac{1}{2} = 0$$

$$-Ta + Wa - \frac{Wa}{2} = 0$$

$$T = \frac{W}{2}$$

AC இன் சமநிலைக்கு

$$\rightarrow\quad X - T\cos 30^\circ = 0$$

$$X = \frac{W}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}W}{4}$$

$$\uparrow\quad R_2 + T\cos 60^0 - Y - W = 0$$

$$W + \frac{W}{2}\times\frac{1}{2} - Y - W = 0$$

$$W + \frac{W}{2}\times\frac{1}{2} - Y - W = 0$$

$$Y = \frac{W}{4}$$

A இல் தாக்கம் $= \sqrt{X^2 + Y^2}$

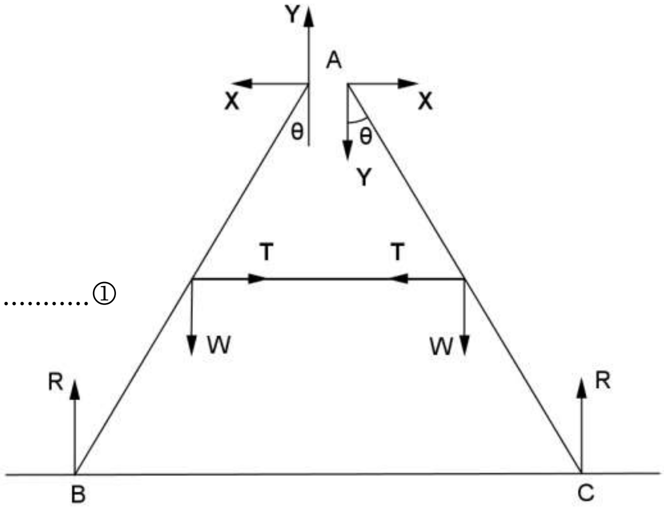
$$= \sqrt{\frac{3W^2}{16} + \frac{W^2}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{4W^2}{16}}$$

$$= \frac{W}{2}$$

உதாரணம் 3

ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய சீரான சமநீளமுடைய கோல்கள் AB, AC என்பன A இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. முனைகள் B, C என்பன ஒப்பமான கிடை தளத்தில் இருக்க, சட்டப்படல் ABC நிலைக்குத்து தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. AB, AC என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கின்ற நீளா இழை ஒன்றினால் தொகுதி சமநிலையில் பேணப்படுகின்றது. $B\hat{A}C = 2\theta$ எனின், இழையின் இழுவையும் மூட்டு A இல் கோல் AB மீது மறுதாக்கத்தின் பருமனைக் காண்க.



Let $AB = AC = 2a$

AB, AC யின் சமநிலைக்கு,

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க.

$\uparrow 2R - 2W = 0$

$R = W$ ....①

AB யின் சமநிலைக்கு,

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க.

$\uparrow 2R + Y - W = 0$

$W + Y - W = 0\ ;\ Y = 0$ ....②

கிடையாகத் துணிக்க.

$\rightarrow T - X = 0\ ;\ T = X$ .... ③

AB இற்கு A பற்றி திருப்பம் எடுக்க.

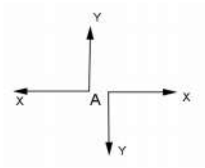
$$A)\quad T.a\cos\theta + W.a\sin\theta - R.2a\sin\theta = 0$$

$$T = \frac{(2W - W)\sin\theta}{\cos\theta} = W\tan\theta \text{ ....④}$$

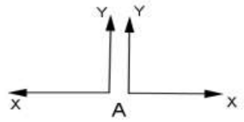
A யில் மறுதாக்கம் $W\tan\theta$ ஆகும்.

குறிப்பு:

மேலே உதாரணம் (1) இல் தரப்பட்ட பிரசினத்தில் சட்டப்படல் A இன் ஊடான நிலைக்குத்துக் கோடு பற்றிச் சமச்சீர் ஆகும். அத்துடன் A இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் நிலைக்குத்து கூறு பூச்சியம் ஆகும். எனவே சட்டப்படலில் சமச்சீர்க் கோட்டின் மீதுள்ள மூட்டில் மறுதாக்கங்களின் நிலைக்குத்துக் கூறுகள் பூச்சியம் ஆகும்.



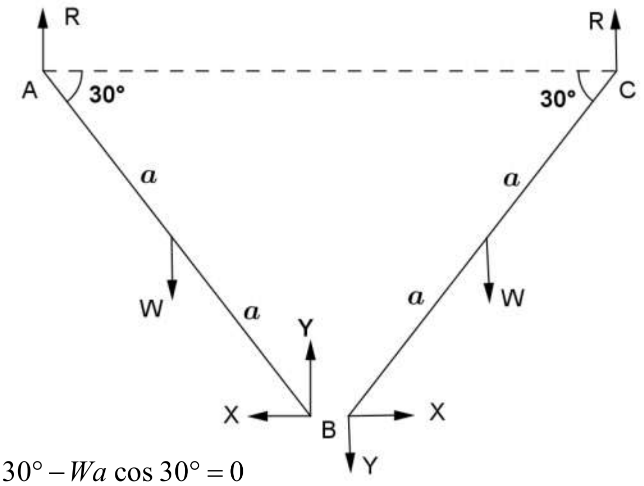
மேலே கருதப்பட்ட கூறுகள் A இன் ஊடான நிலைக்குத்து கோடு பற்றி சமச்சீர் என்பதால் A இல் உள்ள விசைகள் பின்வருமாறு அமைதல் வேண்டும்.



$$2Y = 0$$
$$Y = 0$$

உதாரணம் 4

AB, BC என்பன ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் W நிறையும் கொண்ட சீரான இரண்டு கோல்களாகும். அவை B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளதோடு, ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள A, C என்னும் இரண்டு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டு தொகுதி நிலைக்குத்து தளத்தில் அமையுமாறு சமநிலையில் காணப்படுகின்றது. கோல்கள் கிடையுடன் $30°$ கோணத்தை அமைக்கின்றது எனின் மூட்டு B இல் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.



இவ் உடல் B இன் ஊடான நிலைக்குத்து கோடு பற்றிச் சமச்சீர் என்பதால் $Y = 0$

கோல் AB இன் சமநிலைக்கு,
A பற்றி திருப்பம் எடுப்பதால்,

$$A) \quad -X \cdot 2a \sin 30° + Y \cdot 2a \cos 30° - Wa \cos 30° = 0$$

$$-X \cdot 2a \sin 30° = W.a \cos 30°$$

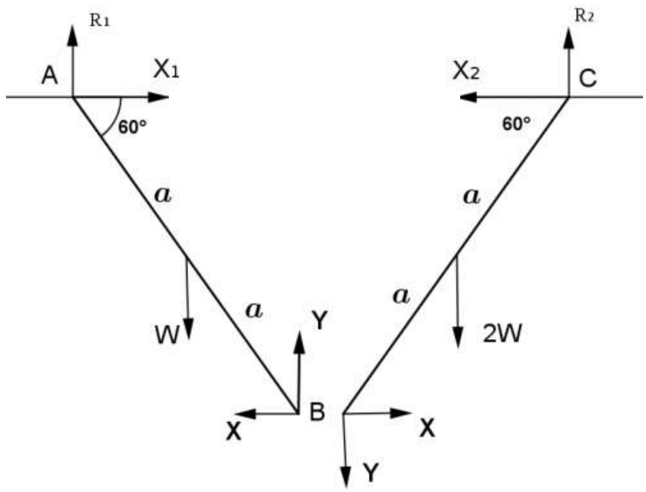
$$X = -\frac{W \cos 30°}{2 \sin 30°}$$

$$= -\frac{W}{2} \cot 30°$$

$$X = -\frac{\sqrt{3}}{2} W$$

உதாரணம் 5

AB, BC என்பன ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் முறையே W, $2W$ நிறையும் கொண்ட சீரான இரண்டு கோல்களாகும். அவை B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளதோடு ஒரே கிடை மட்டத்தில் உள்ள A, C என்னும் இரண்டு புள்ளிகளில் பிணைக்கப்பட்டு தொகுதி நிலைக்குத்து தளத்தில் அமையுமாறு சமநிலையில் காணப்படுகின்றது. கோல்கள் கிடையுடன் $60°$ கோணத்தை அமைக்கும் எனின் மூட்டு B இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.



தொகுதியின் சமநிலைக்கு

$\rightarrow$ $X_1 - X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = X_2$

$\uparrow$ $R_1 + R_2 - W - 2W = 0$

$R_1 + R_2 = 3W$

கோல்கள் AB, AC யிற்கு, A பற்றி திருப்பம் எடுக்க.

A $\circlearrowright$ $R_2.2a - W.\frac{a}{2} - 2W.\frac{3a}{2} = 0$

$2R_2 = \frac{7W}{2}$; $R_2 = \frac{7W}{4}$ and $R_1 = \frac{5W}{4}$

BC யின் சமநிலைக்கு,

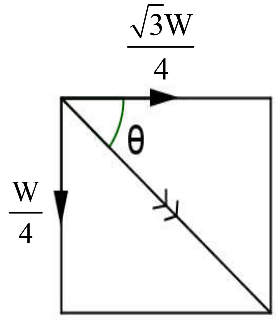
நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க.

$\uparrow$ $R_2 - 2W - Y = 0$; $Y = R_2 - 2W = \frac{7W}{4} - 2W = -\frac{W}{4}$

BC யின் சமநிலைக்கு,

$\overset{\curvearrowleft}{A})$ $X \,.\, 2a \sin 60^\circ + Y \,.\, 2a \cos 60^\circ + 2W \,.\, a \cos 60^\circ = 0$

$\overset{\curvearrowleft}{C})$ $X.\, 2a \sin 60^\circ - \dfrac{W}{4}.\, 2a \cos 60^\circ + 2W.\, a \cos 60^\circ = 0$



$$X = -\frac{\sqrt{3}W}{4}$$

$$R = \sqrt{\frac{3W^2}{16} + \frac{W^2}{16}}$$

$$R = \frac{W}{2}$$

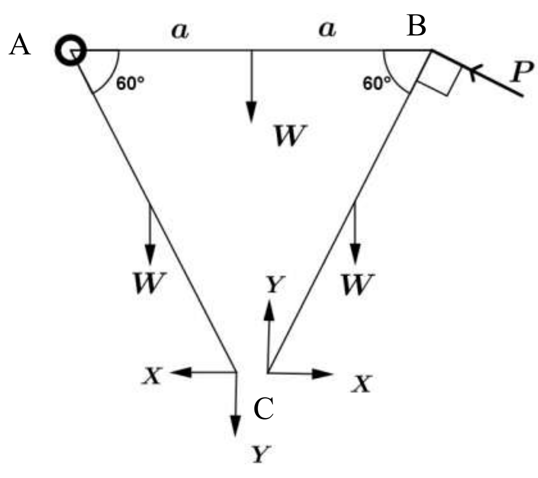
$$\tan\theta = \frac{\frac{W}{4}}{\frac{\sqrt{3}W}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

உதாரணம் 6

ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் W நிறையும் கொண்ட AB, BC, AC என்னும் சீரான மூன்று கோல்கள் அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு ABC என்னும் சமபக்க முக்கோண வடிவிலான சட்டப்படல், நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சுழலத்தக்கவாறு A இல் சுயாதீனமாக பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் BC இற்கு செங்குத்தாக B இல் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு விசை P இனால் AB கிடையாகவும் AB இற்குக் கீழ் C இருக்குமாறும் தொகுதி சமநிலையில் உள்ளது. விசை P இன் பருமன் யாது? அத்துடன் மூட்டு C இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடை, நிலைக்குத்து கூறுகளைக் காண்க.



தொகுதியின் சமநிலைக்கு, A பற்றி திருப்பம் எடுப்பதனால்,

$$A) \; - W\,.a\cos 60° - W.a - W\,(2a - a\cos 60°) + P.\,2a\cos 60° = 0$$

$$P = 3W$$

கோல் AC இன் சமநிலைக்கு, A பற்றி திருப்பம் எடுப்பதனால்,

$$A) \; X.\,2a\sin 60° + Y.\,2a\cos 60° + W.\,a\cos 60° = 0$$

$$\Rightarrow \; X + \frac{Y}{\sqrt{3}} = -\frac{W}{2\sqrt{3}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{①}$$

கோல் BC இன் சமநிலைக்கு, B பற்றி திருப்பம் எடுப்பதனால்,

$$B) \; X\,.\,2a\sin 60° - Y\,.\,2a\cos 60° + W\,.\,a\cos 60° = 0$$

$$\Rightarrow \; X - \frac{Y}{\sqrt{3}} = -\frac{W}{2\sqrt{3}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{②}$$

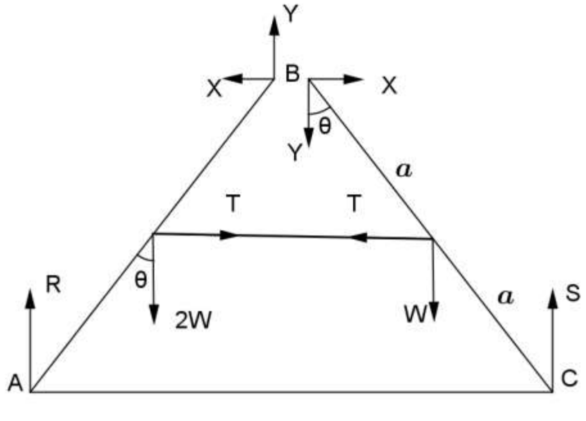
$$\text{①, ②} \;\Rightarrow\; Y = 0$$

$$X = -\frac{W}{2\sqrt{3}}$$

C யில் மறுதாக்கம் $\frac{W}{2\sqrt{3}}$ ஆகும்.

உதாரணம் 7

ஒவ்வொன்றும் சமநீளமும் முறையே 2W, W நிறையும் கொண்ட சீரான இரண்டு கோல்கள் AB, BC என்பன B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு A, C என்பன ஒப்பமான கிடைத்தளத்திலும் ABC நிலைக்குத்துத் தளத்திலும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டு AB, BC இன் நடுப்புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்ட நீளா இழையொன்றினால் சமநிலையில் பேணப்பட்டுள்ளது. $A\hat{B}C = 2\theta$ எனில் இழையில் உள்ள இழுவை $\frac{3W}{2}\tan\theta$ எனக் காட்டுக. B இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.



தொகுதியின் சமநிலைக்கு, C பற்றி திருப்பம் எடுப்பதனால்,

$$C) \quad W.\,a \sin\theta + 2W.\,3a \sin\theta - R.\,4a \sin\theta = 0$$

$$R = \frac{7W}{4}$$

கோல் AB இன் சமநிலைக்கு, B பற்றி திருப்பம் எடுப்பதனால்,

$$B) \quad T.\,a \cos\theta + 2W.\,a \sin\theta - R.\,2a \sin\theta = 0$$

$$T = -2W \tan\theta + 2R.\tan\theta$$

$$T = -2W \tan\theta + \frac{7W}{2}\tan\theta$$

$$T = \frac{3W}{2}\tan\theta$$

கோல் AB இன் சமநிலைக்கு,

$$\rightarrow \quad T - X = 0\,;\; X = T = \frac{3W}{2}\tan\theta$$

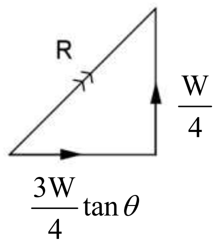
$$\uparrow \quad Y + R - 2W = 0$$

$$Y = 2W - \frac{7W}{4} = \frac{W}{4}$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

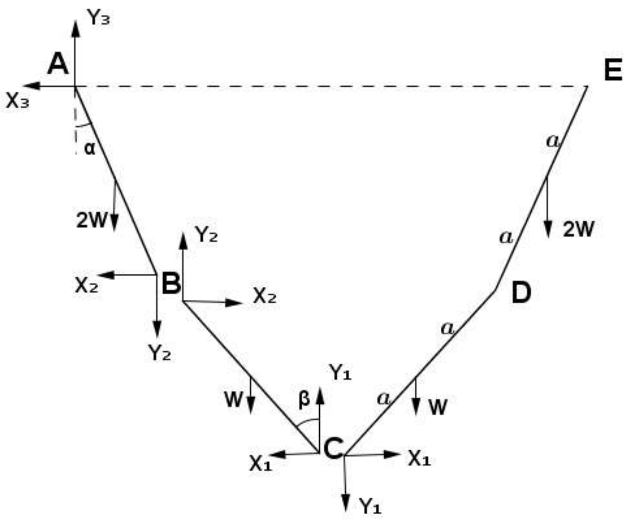
$$= \sqrt{\frac{9W^2}{4}\tan^2\theta + \frac{W^2}{16}}$$

$$= \frac{W}{4}\sqrt{1 + 36\tan^2\theta}$$



உதாரணம் 8

AB, BC, CD, DE என்பன ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் AB, DE என்பன 2W நிறையையும் BC, CD என்பன W நிறையையும் உடைய சீரான நான்கு கோல்கள் B, C, D இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு ஒரே கிடைமட்டத்தில் உள்ள புள்ளி A, E இல் சுயாதீனமாகத் தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. கோல்கள் AB, BC நிலைக்குத்துடன் முறையே α, β கோணங்களில் சாய்ந்துள்ளது. மூட்டு C இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடைக்கூறு $\frac{W}{2}\tan\beta$ எனக்காட்டுக. அத்துடன் $\tan\beta = 4\tan\alpha$ எனக் காட்டுக.



தொகுதி Cயின் ஊடான நிலைக்குத்துக்கோடு பற்றிச் சமச்சீர் எடுப்பதனால்,

$$\Rightarrow \quad Y_1 = 0$$

கோல் BC இன் சமநிலைக்கு விசைகளைக் கிடையாகப் பிரிப்பதனால்,

$$X_2 - X_1 = 0$$
$$X_2 = X_1$$

விசைகளைக் நிலைக்குத்தாகப் பிரிப்பதனால்,

$$\uparrow \quad Y_2 + Y_1 - W = 0$$

$$\Rightarrow \quad Y_2 = W$$

கோல் BC இன் சமநிலைக்கு B பற்றித் திருப்பம் எடுப்பதால்,

$$B) \quad -X_1 .\ 2a\cos\beta - W.\ a\sin\beta = 0$$
$$X_1 = -\frac{W}{2}\tan\beta$$

கோல் AB இன் சமநிலைக்கு A பற்றி திருப்பம் எடுப்பதனால்

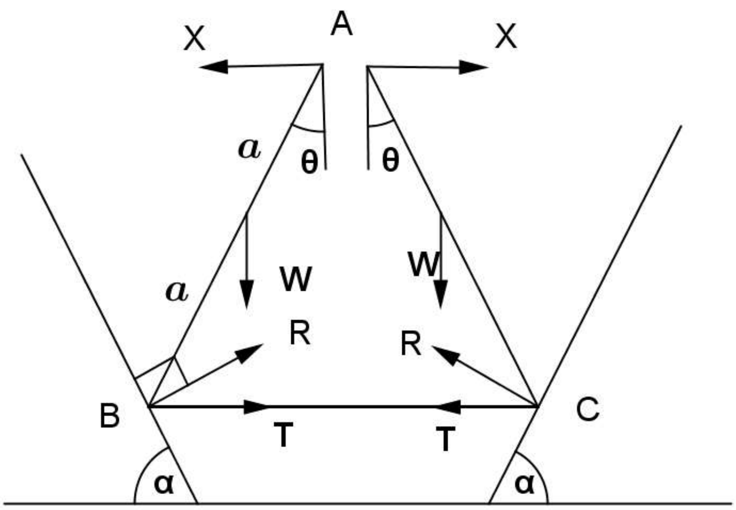
$$A) \quad -X_2 .\ 2a\cos\alpha - 2W.\ a\sin\alpha - Y_2 .\ 2a\sin\alpha = 0$$
$$-X_2 = W\tan\alpha + Y_2\tan\alpha = 2W\tan\alpha$$
$$X_2 = -2W\tan\alpha$$
$$X_1 = X_2$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{W}{2}\tan\beta = -2W\tan\alpha$$
$$\tan\beta = 4\tan\alpha$$

உதாரணம் 9

ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் சம நீளமும் கொண்ட சீரான AB, AC என்னும் இரண்டு கோல்கள் A இல் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டு முனைகள் B,C என்பன இலேசான நீளா இழையொன்றினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இத்தொகுதி கோல் BC கிடையாக இருக்குமாறும் BC இற்கு மேல் A இருக்குமாறும் ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் $\alpha(\alpha <)$ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள ஒப்பமான இரண்டு தளங்களின் மீது முனைகள் B, C என்பன தொட்டுக்கொண்டிருக்க தொகுதியானது A இனூடாக நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன் சமச்சீராக அமையுமாறு நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் சமநிலையில் காணப்படுகிறது.

மூட்டு B இல் உள்ள மறுதாக்கத்தினைக் காண்க. $\tan\theta > \tan\alpha$ எனில் இழையின் இழுவை $\frac{W}{2}(\tan\theta - \tan\alpha)$ எனக் காட்டுக. இங்கு ஆகும். அத்துடன் மூட்டு A இல் உள்ள மறுதாக்கத்தினைக் காண்க.



தொகுதி Aயின் ஊடான நிலைக்குத்துக்கோடு பற்றிச் சமச்சீர் எடுப்பதனால்,

$$Y = 0$$

தொகுதியின் சமநிலைக்கு விசைகளைக் நிலைக்குத்தாகப் பிரிப்பதனால்,

$$\uparrow \quad 2R\cos\alpha - 2W = 0$$

$$R = W\sec\alpha$$

கோல் AB இன் சமநிலைக்கு A பற்றித் திருப்பம் எடுப்பதனால்,

$$\overset{\curvearrowleft}{A)} \quad T.\,2a\cos\theta + W.\,a\sin\theta + R.\,\sin\alpha\,.2a\cos\theta - R\cos\alpha\, 2a\cos\theta = 0$$

$$T = W\tan\alpha - \frac{W}{2}\tan\theta$$

$$T = \frac{W}{2}\,[2\tan\alpha - \tan\theta]$$

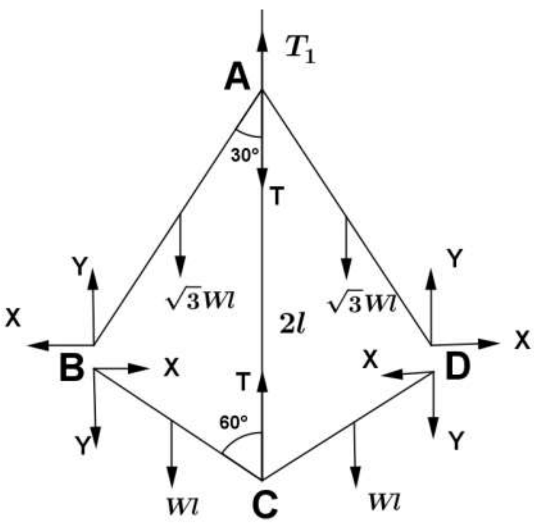
கோல் AB இன் சமநிலைக்கு B பற்றி திருப்பம் எடுப்பதனால்

B) $X.\, 2a\cos\theta - W.\, a\sin\theta = 0$

$$X = \frac{W}{2}\tan\theta$$

உதாரணம் 10

ஒவ்வொன்றும் ஓர் அலகு நிறை W வும் $AB = AD = \sqrt{3}l$, $BC = DC = l$ நீளமும் கொண்ட சீரான நான்கு கோல்கள் அவற்றில் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட ABCD எனும் சட்டப்படல், முனைகள் A, C இற்கு $2l$ நீளமுள்ள நீளா இழையொன்றினால் இணைக்கப் பட்டும் முனை A இல் இருந்து நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. இழையிலுள்ள இழுவை $\frac{W\ell}{4}\left(\sqrt{3}+5\right)$ எனக் காட்டுக.



முறை I:

$$AB^2 + BC = 3l^2 + l^2$$
$$= 4l^2$$
$$= AC^2$$

$$\Rightarrow \quad A\hat{B}C = 90^\circ,\ B\hat{A}C = 30^\circ,\ B\hat{C}A = 60^\circ$$

தொகுதி AC பற்றிச் சமச்சீராக இருப்பதால் மூட்டுக்கள் B, C இல் உள்ள மறுதாக்கங்கள் சமன் ஆகும்.

கோல் AB இன் சமநிலைக்கு A பற்றித் திருப்பம் எடுப்பதனால்

A) $X.\, \sqrt{3}l\cos 30^\circ + Y.\, \sqrt{3}l\sin 30^\circ - \sqrt{3}lW.\, \frac{\sqrt{3}l}{2}\sin 30^\circ = 0$

$$X . \cot 30^\circ + Y = \frac{\sqrt{3}}{2}lW$$

$$\sqrt{3}X + Y = \frac{\sqrt{3}}{2}\, lW \text{ .... } ①$$

கோல் BC இன் சமநிலைக்கு C பற்றித் திருப்பம் எடுப்பதனால்,

$$\overset{\frown}{C}\ Y.\ l\sin60 + Wl\ \tfrac{l}{2}\sin60 - X.\ l\cos60 = 0$$

$$Y + \frac{Wl}{2} = \frac{X}{\sqrt{3}}$$

$$X - \sqrt{3}Y = \frac{\sqrt{3}Wl}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \quad Y + \sqrt{3}\left[\sqrt{3}Y + \frac{Wl}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}Wl}{2}$$

$$4Y + \frac{3Wl}{2} = \frac{\sqrt{3}Wl}{2}$$

$$Y = \frac{Wl}{8}\left(\sqrt{3}-3\right)$$

கோல்கள் BC, CD இன் சமநிலைக்கு நிலைக்குத்துத் திசையில் விசைகளைப் பிரிப்பதனால்,

$$\uparrow\ T - 2Y - 2Wl = 0$$

$$T = 2Y + 2Wl$$

$$T = 2\frac{Wl}{8}\left(\sqrt{3}-3\right) + 2Wl$$

$$T = \frac{Wl}{4}\left(\sqrt{3}+5\right)$$

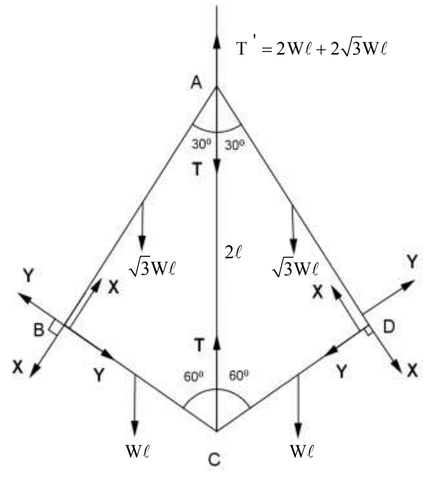
முறை II:

$$AB^2 + BC^2 = 3l^2 + l^2$$

$$= 4l^2$$

$$= AC^2$$

$$A\hat{B}C = 90^0\ ,\ B\hat{A}C = 30^0\ ,\ B\hat{C}A = 60^0$$



சமச்சீரினால் B, D என்பவற்றில் மறுதாக்கங்கள் சமம். மேலும் மறுதாக்கத்தின் கூறுகள் கோல் வழியேயும் கோலிற்கு செங்குத்தாயும் எடுக்கப்பட்டுள்ளன.

AB இன் சமநிலைக்கு A பற்றித் திருப்பம் எடுப்பதனால்,

$$\overset{\frown}{A}\ \sqrt{3}Wl.\ \frac{\sqrt{3}l}{2}\sin30^\circ - Y.\ \sqrt{3}l = 0$$

$$Y = \frac{\sqrt{3}Wl}{4}$$

BC இன் சமநிலைக்கு C பற்றித் திருப்பம் எடுப்பதனால்,

$$\overset{\curvearrowleft}{C}\quad Wl.\ \tfrac{l}{2}\sin 60 - X.\ l = 0$$

$$X = \frac{\sqrt{3}W\ell}{4}$$

BCD இன் சமநிலைக்கு நிலைக்குத்து திசையில் விசைகளைப் பிரிப்பதால்,

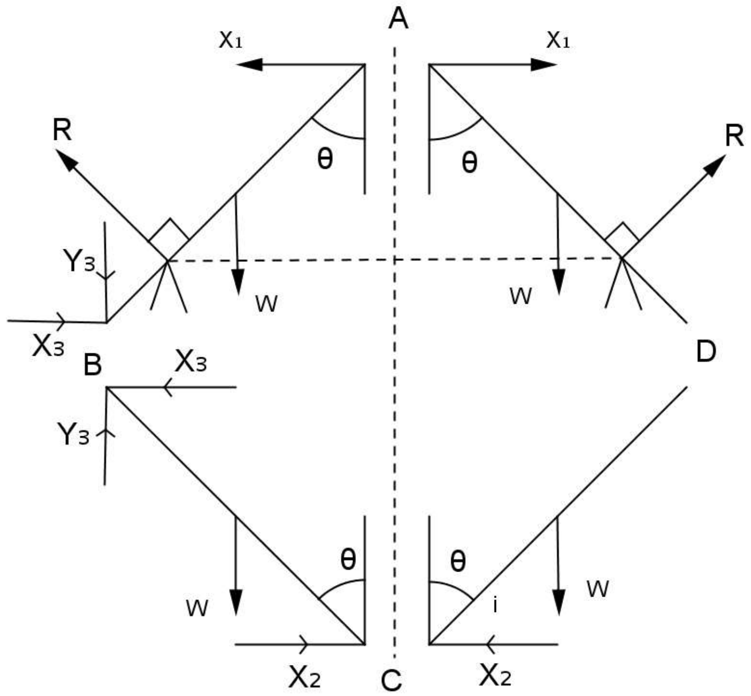
$$\uparrow\ T - 2Wl + 2X\cos 60 - 2Y\cos 30 = 0$$

$$T = 2Wl + 2(Y - X)\cos 30$$

$$T = \frac{Wl}{4}\left(\sqrt{3} + 5\right)$$

உதாரணம் 11

ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் W நிறையும் உடைய AB, BC, CD, DA என்பன அவற்றின் முனைகளில் மூட்டப்பட்டுள்ளன. மேலே உள்ள கோல்கள் AB, AD என்பன $2c$ இடை தூரத்தில் உள்ள இரு கிடையான ஒப்பமான முனைகளின் மீது தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் கோல்கள் நிலைக்குத்துடன் θ கோணத்தை அமைக்கின்றன. முனை B இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடை, நிலைக்குத்து கூறுகளைக் கண்டு $c = 2a\sin^3\theta$ எனக் காட்டுக.



தொகுதியானது A பற்றி சமச்சீராக இருப்பதால் A, C யில் உள்ள மறுதாக்கங்களின் நிலைக்குத்துக் கூறு பூச்சியமாகும்.

தொகுதியின் சமநிலைக்கு,

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க.

$$\uparrow\ 2R\sin\theta - 4W = 0$$

$$R = \frac{2W}{\sin\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ①$$

BC இன் சமநிலைக்கு,

$$\overset{\curvearrowleft}{B)}\quad X_2 .\ 2a\cos\theta - W.a\sin\theta = 0$$

$$X_2 = \frac{W\tan\theta}{2} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ ②$$

கிடையாகத் துணிக்க.

$$\rightarrow X_2 - X_3 = 0;\ X_3 = X_2 = \frac{W\tan\theta}{2} \ldots\ldots ③$$

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க.

$$\uparrow Y_3 - W = 0\ ;\ Y_3 = W \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ④$$

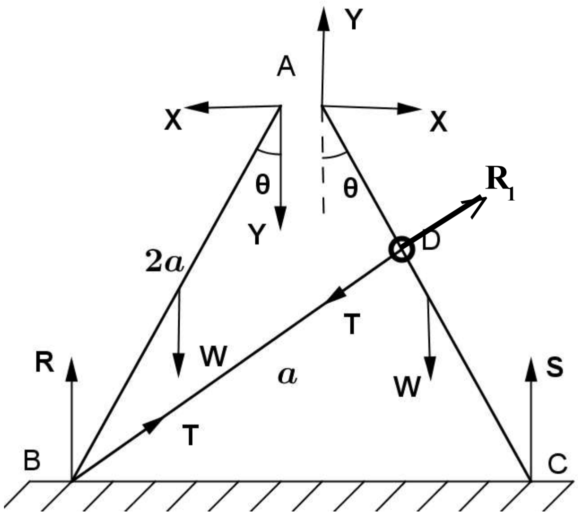
AB இன் சமநிலைக்கு,

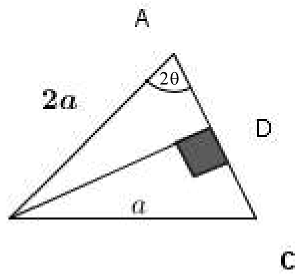
$$\overset{\curvearrowleft}{A)}\quad -R.\frac{c}{\sin\theta} + Wa.\sin\theta + Y_3.2a\sin\theta + X_3.2a\cos\theta = 0$$

$$-\frac{2W.c}{\sin^2\theta} + W.a\sin\theta + W.2a\sin\theta + \frac{W}{2}.2a\sin\theta = 0\ ; \qquad c = 2a\sin^3\theta$$

உதாரணம் 12

ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் W நிறையுமுள்ள AB, AC என்னும் இரு சீரான கோல்கள் A இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு, a நீளமுள்ள இலேசான கோல் BD யினால் முனை B யில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டும் கோல் AC இல் சுயாதீனமாக வழுக்கவல்ல இலேசான வளையம் ஒன்றிற் பிணைக்கப்பட்டும் B, C முனைகள் ஒப்பமான கிடைத்தளமொன்றில் இருக்குமாறு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சமநிலையில் பேணப்படுகின்றது. மூட்டு A இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமன் எனவும் மறுதாக்கத்தின் பருமன் கோல் BD இல் உள்ள உமைப்புக்கு சமன் எனவும் இது கிடையுடன் 15 அமைக்கும் எனவும் காட்டுக. அத்துடன் தாக்கக்கோடு BC ஐ வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.





$$A\hat{D}B = 90°$$

$$\sin 2\theta = \frac{1}{2}$$

$$2\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{\pi}{12}$$

வளையத்தின் சமநிலை $R_1 = T$

R_1 கோலுக்கு செங்குத்து அதனால் T கோலிற்குச் செங்குத்து ஆகும்.

தொகுதியின் சமநிலைக்கு விசைகள் நிலைக்குத்தாகப் பிரிப்பதனால்,

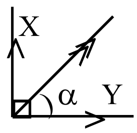
$$\uparrow \; R + S - 2W = 0 \; ;$$
$$R + S = 2W$$

C பற்றி திருப்பம் எடுப்பதனால்,

$$C) \; W.\, a\cos 75 + W.\, 3a\cos 75 - R.\, 4a\cos 75 = 0$$
$$\Rightarrow R = S$$
$$\Rightarrow R = S = W$$

கோல் AC இன் சமநிலைக்கு A பற்றி திருப்பம் எடுப்பதால்,

$$A \quad T.a\sqrt{3} + Wa\sin 15° - W2a\sin 15° = 0$$
$$T = \frac{W\sin 15}{\sqrt{3}} = \frac{W}{12}\left(3\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)$$



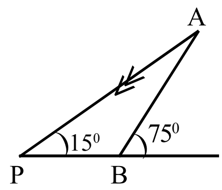
கோல் AC இன் சமநிலைக்கு,

$$\uparrow \; X = T\cos 15°$$

$$\rightarrow \; Y = T \sin 15°$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = T$$

$$\tan 15° = \frac{Y}{X}$$



$$\tan 15° = \frac{BP}{\sin 60°} = \frac{AB}{\sin 15°}$$

5.4 பயிற்சி

1. x t ;n t hd ;Wk ; r k esP K k ; K i wNa W_1, W_2 நிறைகளும் கொண்ட AB, AC என்னும் இரு சீரான கோல்கள் B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இச்சட்டப் படலானது $BC = 2a$ ஆக இருக்குமாறு ஒரே கிடைமட்டத்தில் உள்ள புள்ளிகள் B, C இற்கு ஒப்பமாக பிணைக்கப்பட்டு BC இற்கு கீழே a ஆழத்தில் A இருக்குமாறு தொங்கிக்கொண்டிருக்கின்றது. முனை A இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளைக் காண்க.

2. ஒவ்வொன்றும் நிறை W உடைய AB, BC என்னும் இரு சீரான சம நீளமுடைய கோல்கள் B இல் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டு அவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் மீள்தன்மை இல்லாத இழை ஒன்றினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு இழை முற்றாக நீட்ட இருக்கும்போது $ABC = \frac{\pi}{2}$ ஐ உருவாக்கத்தக்க நீளத்தை உடையது. தொகுதி புள்ளி A இல் இருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டு சமநிலைத் தானத்தில் இருப்பின் நிலைக்குத்துடன் AB இன் சாய்வு $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ எனவும் இழையில் உள்ள இழுவை $\frac{3W}{\sqrt{5}}$ எனவும் காட்டுக. அத்துடன் கோல் BC மீது மூட்டு B இன் மறுதாக்கமானது BC வழியே அமையும் எனவும் காட்டுக.

3. ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் W நிறையும் உடைய AB, AC என்னும் இரண்டு சமமான கோல்கள் A இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு, அச்சு கிடையாக நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளதும் r ஆரை உள்ள ஒப்பமான வட்ட உருளைமீது சமச்சீராக ஓய்வில் உள்ளது. ஒவ்வொரு கோலும் கிடையுடன் அமைக்கும் சாய்வு θ எனில் $a\cos^3\theta.\mathrm{cosec}\theta = r$ எனக் காட்டுக. A இல் உள்ள மூட்டின் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

4. AB, BC, AC என்னும் மூன்று சீரான சமநீளமுள்ள கோல்கள் முனைகள் A, B, C இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. AC, AB ஆகியன ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் BC என்ற கோல் 2W நிறையும் உடையன. சட்டப்படல் C இல் இருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. BC கிடையுடன் $\tan^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ என்னும் கோணத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக. A இலும் C இலும் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

5. ஒவ்வொன்றும் நிறை W உடைய AOB, COD என்னும் இரு சீரான சம கோல்கள் O இல் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இங்கு $AO = CO = a, BO = OD = 3a$ உம் ஆகும். இவ் உடல் ஒரே கிடைத்தளத்தில் B, D தங்கவும் $3a$ நீளமுள்ள நீளா இழையினால் முனைகள் B, D இணைக்கப்பட்டும் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சமநிலையில் உள்ளன. இழையில் $\frac{2\sqrt{3}W}{9}$ உள்ள இழுவை எனக் காட்டுக. அத்துடன் மூட்டு O இல் உள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

6. ஒவ்வொன்றும் சம நீளமுள்ள முறையே $2W, W$ நிறைகள் கொண்ட சீரான AB, AC கோல்கள் A இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு ஒரே கிடைமட்டத்தில் B, C நிலைப்படுத்தப்பட்டு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சமநிலையில் உள்ளது. முனை A இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளைக் காண்க. மூட்டுக்கள் B, C இல் உள்ள மறுதாக்கங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில் $3\cot\alpha = \sqrt{35}$ எனக் காட்டுக. இங்கு $A\hat{B}C = \alpha$ ·

7. OA, AB, BC என்பன ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் W நிறையும் கொண்ட சீரான கோல்கள் A, B என்பவற்றில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. O ஆனது ஒரு நிலையான புள்ளிக்கு பிணைக்கப்பட்டு BC இற்கு C இல் ஒரு கிடை விசை P பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. BC யானது கிடையுடன் 45° கோணத்தை அமைக்கின்றது. P ஐ W சார்பாகப் பெறுக. பிணையல் O இலுள்ள மறுதாக்கம் $\frac{\sqrt{37}W}{2}$ என நிறுவுக. O இனூடான நிலைக்குத்திலிருந்து C யிற்கான இடைத்தூரம் $2a\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{26}}\right]$ என நிறுவுக.

8. AB, BC என்பன சம நீளத்தையும் W நிறையும் உடைய இரண்டு சீரான பாரமான கோல்கள். AB ஆனது A பற்றி சுயாதீனமாக சுழலக்கூடியது. B இல் ஓர் பிணையல் உண்டு. கிடையுடன் கோணம் α இல் கீழ் முகமாகச் சாய்ந்து A இற்கு ஊடாகச் செல்லும் ஓர் நிலையான கோல் வழியே சுயாதீனமாக இயங்கக்கூடிய ஒரு வளையம் ஆனது C இல் உண்டு. சமநிலையில் $\tan B\hat{A}C = \frac{1}{2}\cot\alpha$ என்றும் B இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடைக்கூறு $\frac{3W}{8}\sin 2\alpha$ எனவும் காட்டுக.

9. ஒவ்வொன்றும் நிறை W உடைய நான்கு சமச்சீர்க் கோல்கள் ஒரு சாய்சதுரம் ABCD ஐ ஆக்குமாறு அவற்றின் முனைகளில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இத்தொகுதி மூட்டு A இல் இருந்து தொங்கவிடப்பட்டு BC, CD ஆகிய இரு கீழ் கோல்களினதும் நடுப்புள்ளிகளைத் தொடுக்கின்ற ஓர் இலேசான கோலினால் சதுரவடிவில் சமநிலையில் பேணப்படுகின்றன. இலேசான கோலில் உள்ள உதைப்பையும் C இல் உள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

10. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய AB, BC, CD, DE, EA என்னும் சமமான சீரான 5 கோல்கள் ஐங்கோணி ஒன்றை உருவாக்கும் வகையில் A, B, C, D, E ஆகிய முனைப் புள்ளிகளில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. AB, AE ஆகிய கோல்கள் நிலைக்குத்துடன் ஒரே கோணம் α ஐயும் BC, ED ஆகிய கோல்கள் நிலைக்குத்துடன் ஒரே கோணம் β ஐயும் அமைக்க மூட்டு A இல் இருந்து தொங்குகின்றது. B ஐயும் E ஐயும் புறக்கணிக்கத்தக்க நிறைகொண்ட கோல் ஒன்றினால் இணைத்து இவ் உருவ அமைப்பு பேணப்படுகின்றது.

(i) மூட்டு C இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடை, நிலைக்குத்து கூறுகளைக் காண்க.

(ii) BE இலுள்ள தகைப்பு $W(2\tan\alpha + \tan\beta)$ எனக் காட்டுக.

(iii) ஐங்கோணி உருவம் ஒழுங்காக இருக்கையில் BE இல் உள்ள தகைப்பு யாது?

11. ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் W நிறையும் உடைய AB, BC, CD, DA ஆகிய 4 கோல்கள் A, B, C, D இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. BC இனதும் CD இனதும் நடுப்புள்ளிகள் $2a\sin\theta$. நீளமுடைய இலேசான கோலினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இச்சட்டப்படல் A இல் இருந்து சுயாதீனமாக தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது.

(i) இவ் இலேசான கோலில் உள்ள உதைப்பு $4W\tan\theta$ எனக் காட்டுக.

(ii) B, C இல் உள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

12. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள நான்கு சம கோல்கள் AB, BC, CD, DA என்பன அவற்றின் முனைகளில் மூட்டப்பட்டு உருவாக்கப்பட்ட சட்டப்படல் ABCD என்பது A இல் இருந்து தொங்குகின்றது AB, BC என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளை தொடுக்கும் இலேசான இழை ஒன்றினால் சதுர வடிவம் பேணப்படுகின்றது.

(i) மூட்டு D இல் உள்ள மறுதாக்கம் கிடையாக $\frac{W}{2}$ எனவும்

(ii) இழையில் உள்ள இழுவை $4W$ எனவும்

(iii) மூட்டு C இல் உள்ள மறுதாக்கம் நிலைக்குத்துடன் $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ கோணம் அமைக்கும் திசையில் $\frac{W\sqrt{5}}{2}$ எனவும்

(iv) மூட்டு B இல் உள்ள மறுதாக்கம் நிலைக்குத்துடன் $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ கோணம் அமைக்கும் திசையில் $\frac{W\sqrt{17}}{2}$ எனவும் காட்டுக.

13. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள நான்கு சமசீரான கோல்கள் AB, BC, CD, DA ஆகியவற்றின் முனைகளில் மூட்டப்பட்டு சதுரம் ஒன்றை ஆக்குகின்றன. இச் சதுரம் A இல் இருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டு C இல் $3W$ நிறை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. AB இனதும் AD இனதும் நடுப்புள்ளியை இணைக்கும் மெல்லிய கிடைக்கோல் ஒன்றினால் இச்சட்டப்படல் சதுர வடிவில் பேணப்படுகின்றது. இக்கோலில் உள்ள உதைப்பு $10\,W$ எனக் காட்டுக.

14. ஒவ்வொன்றும் l நீளமும் W நிறையும் உடைய நான்கு சீரான கோல்கள் அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு சட்டப்படல் ABCD ஆனது ஆக்கப்பட்டுள்ளது. முனைகள் A யும் C யும் உள்ள மீள்தன்மையுடைய இழையால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. A இல் இருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சதுர வடிவத்தில் இயற்கை நீளம் a ஆக இழையின் மீள்தன்மைமட்டைக் காண்க. அத்துடன் மூட்டுக்கள் B, D இல் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

15. ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் சம நீளமும் கொண்ட ஆறு கோல்கள் அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. ஒரு ஒழுங்கான அறுகோண வடிவில் பேணப்படுகின்றன. ABCDEF எனும் சட்டப்படல் ஆக்கப்பட்டுள்ளது. BF, CE என்ற இலேசான கோல்களால் A இல் இருந்து சுயாதீனமாக தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கோல் BF இல் உள்ள தகைப்பின் பருமன் கோல் CE இல் உள்ள தகைப்பின் பருமனின் 5 மடங்கு எனக்காட்டுக.

16. சீரான ஒப்பமான கோல் ஒன்று முறையே $l, 2l, l$ என்னும் நீளங்களை உடைய AB, BC, CD ஆகிய மூன்று துண்டுகளாக வெட்டப்படுகின்றது. இவை B இலும் C இலும் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு, $2l$ ஆரையும் O ஐ மையமாகவும் கொண்ட நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஒப்பமான கோளம் ஒன்றின்மீது BC இன் நடுப்புள்ளியும் முனைப்புள்ளிகள் A யும் D யும் கோளத்துடன் தொடுகையில் இருக்குமாறு ஓய்வில் கிடக்கின்றன. கோல் BC மீது அதன் நடுப்புள்ளியில் உள்ள மறுதாக்கம் $\dfrac{91W}{100}$ எனக் காட்டுக. இங்கு W கோலின் நிறையாகும். கோல் CD மீது மூட்டு C இலே உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் அதன் தாக்கக்கோடானது OD ஐ சந்திக்கும் புள்ளியையும் காண்க.

17. ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் a நீளமும் கொண்ட AB, BC, AC எனும் மூன்று கோல்கள் அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு ஒரு முக்கோண வடிவிலான சட்டப்படல் ஆக்கப்பட்டுள்ளது. இது A, C ஆனது ஒரு கிடைத்தளத்தில் வைக்கப்பட்டும் B ஆனது AC இற்கு மேலாக இருக்குமாறும் ஒரு நிறை W கோல் AB இல் உள்ள ஒரு புள்ளி D இல் இணைக்கப்பட்டும் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சமநிலையில் உள்ளது. இங்கு $AD = \dfrac{a}{3}$ மூட்டு B இல் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

18. ஒவ்வொன்றும் நிறை W வையும் நீளம் $2a$ ஐயும் உடைய AB, AC என்னும் இரு சீரான சமகோல்கள் A இல் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டு B, C ஆகிய முனைகள் ஒப்பமான கிடை மேசை ஒன்றின்மீது தங்க நிலைக்குத்துத் தளம் ஒன்றில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. C ஐ AB இன் நடுப்புள்ளியுடன் இணைக்கும் நீளா இலேசான இழையொன்றினால் சமநிலையில் பேணப்படுகின்றது. ஒவ்வொரு கோலும் கிடையுடன் ஒரு கோணம் $\alpha\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ ஐ ஆக்குகிறது. இழையில் உள்ள இழுவை $\mathrm{T}=\frac{W}{4}\sqrt{1+9\cot^2\alpha}$ எனக் காட்டுக. மூட்டு A இல் உள்ள மறுதாக்கத்தில் பருமன், திசை என்பவற்றையும் காண்க.

19. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள AB, BC, CD, DE, EA என்னும் சீரான ஐந்து சம கோல்கள் ஒரு சட்டப்படல் ABCDE ஐ ஆக்குமாறு $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}$ இல் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட் டுள்ளது. இச் சட்டப்படல் CD ஆனது ஒரு கிடைத்தளத்தில் தங்கியிருக்க நிலைக்குத்து தளம் ஒன்றில் வைக்கப்பட்டு BC, DE ஆகிய கோல்களின் நடுப்புள்ளியை தொடுக்கின்ற இலேசான கோல் ஒன்றினால் ஐங்கோணி வடிவம் பேணப்படுகின்றது.

(i) கோல்கள் AB, BC இல் தாக்கும் விசைகளைக் காண்க.

(ii) இழையில் உள்ள இழுவை $\left[\cot\frac{\pi}{5}+3\cot\frac{2\pi}{5}\right]W$ எனக் காட்டுக.

20. ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் W நிறையுடைய சீரற்ற கோல்கள் $\mathrm{AB}, \mathrm{BC}, \mathrm{CD}$ என்பன B, C இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு, கோல்கள் AB, CD என்பன ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள இரு ஒப்பமான முனைகள் மீது நிலைக்குத்து தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் கோல்கள் AB, CD என்பன நிலைக்குத்துடன் α கோணத்தையும், கோல் BC கிடையாகவும் உள்ளது. இரு முனைகளுக்கு இடையே தூரம் $2a\left(1+\frac{2}{3}\sin^3\alpha\right)$ எனக் காட்டும். மூட்டு B இல் உள்ள மறுதாக்கம் நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் கோணம் β எனின், $\tan\alpha\,.\,\tan\beta=3$ எனக் காட்டுக.

6.0 சட்டப்படல்கள்

மூன்று அல்லது மூன்றுக்கு மேற்பட்ட கோல்கள், ஒரே தளத்தில் அமையுமாறு அவற்றின் முனைகளில் மூட்டப்படுவதால் பெறப்படும் வடிவம் சட்டப்படல் எனப்படும்.

இலேசான கோல்களினால் ஆக்கப்பட்ட விறைப்பான சட்டப்படல் மட்டும் இங்கு கருத்திற் கொள்ளப்படுகின்றன.

6.1 விறைப்பான சட்டப்படல்

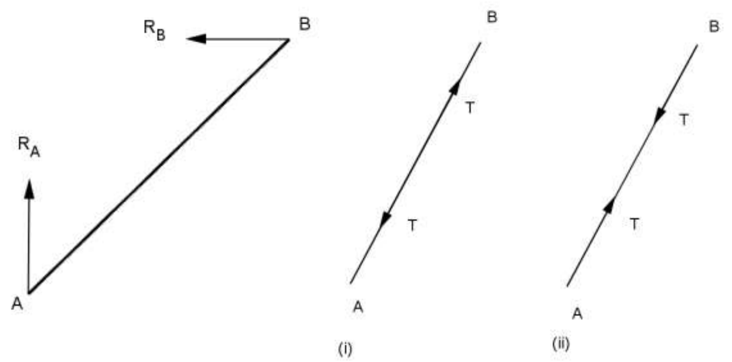
புறவிசைகளின் தாக்கத்தினால் அதன் வடிவம் மாறாதது எனில் இவ்வகையான சட்டப்படல் விறைப்பான சட்டப்படல் எனப்படும்.

முடிவு

சட்டப்படல்களின் கோல்கள் அனைத்தும் இலேசானவை என்பதால் அதன் மூட்டுகளில் தாக்கும் மறுதாக்கங்கள் கோல்களின் வழியே இருக்கும்.

நிறுவல்

இவ்வாறான சட்டப்படலொன்றில் காணப்படும் AB என்னும் கோலொன்றின் சமநிலையைக் கருத்திற்கொள்க. கோலின் சமனிலைக்கு R_A, R_B என்பன சமமாக வேண்டியதோடு அவை ஒரே நேர்கோட்டிலும் எதிர்திசைகளிலும் தாக்கவேண்டும். இது நடைபெறக்கூடிய இரண்டு வழிகள் உண்டு அவை பின்வருமாறு.



இங்கு $R_A = R_B = T$

மேலே காட்டப்பட்டவாறு இலேசான கோல்களின் வழியே தாக்கும் விசை தகைப்பு எனப்படும். தகைப்பு முதலாம் வடிவத்தில் இருக்கும்போது அது இழுவை எனப்படும். இரண்டாம் வடிவத்தில் இருக்கும்போது உதைப்பு எனப்படும்.

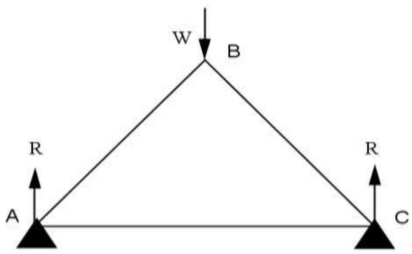
சட்டப்படல்கள் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்க்கும்போது பின்பற்றப்படும் எடுகோள்கள்:

- கோல்கள் யாவும் இலேசானவை.
- எல்லாக் கோல்களும் அவற்றின் முனைகளில் சுயாதீனமாக (ஒப்பமாக) மூட்டப்பட்டுள்ள தோடு மூட்டொன்றில் இணை உவாகாது.
- மூட்டுகளில் உருவாகும் மறுதாக்கங்கள் (புறவிசைகளைத் தவிர்த்து) கோல்களின் வழியே தாக்கும். இவ்விசை தகைப்பு எனப்படுவதோடு அது இழுவையாகவோ அல்லது உதைப்பாகவோ இருக்கும்.
- எல்லாக்கோல்களும் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் காணப்படும். எனவே தொகுதியில் உள்ள எல்லா விசைகளும் (புறவிசைகள் உட்பட) ஒருதள விசைகளாகும்.
- புறவிசைகள் மூட்டுக்களில் மட்டும் பிரயோகிக்கப்படும்.

6.2 சட்டப்படலின் சமநிலையில் புறவிசைகளைக் குறித்தல்.

உதாரணம் 1

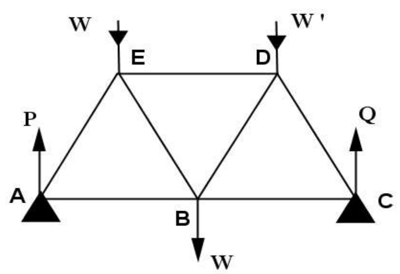
உருவில் காட்டுவது ஒவ்வொன்றும் நீளத்தில் சமனான மூன்று கோல்களாலான சட்டப்படல் ஆகும். மூட்டு B இல் W நிறையொன்று தொங்கவிடப்பட்டு சட்டப்படல் A, C இலுள்ள முனைகளின் மீது வைக்கப்பட்டுச் சமநிலையில் உள்ளது.



இதில் புறவிசைகளை குறிப்போமாயின் சட்டப்படல் B இன் ஊடான நிலைக்குத்துக்கோடு பற்றிச் சமர்சீரானதால் A, C என்பவற்றில் உள்ள மறுதாக்கங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமன். இவை R எனக் குறிபபிடப்பட்டுள்ளன.

உதாரணம் 2

உருவில் காட்டியவாறு சமநீளங்களைக் கொண்ட கோல்களால் ஆக்கப்பட்ட சட்டப்படல் ABCDE இல் D, E, B இல் முறையே W', W, W நிறைகள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. ஒரே கிடைமட்டத்தில் உள்ள இரு தாங்கிகள் மீது A, C அமையுமாறு வைக்கப்பட்டு சட்டப்படல் சமநிலையில் பேணப்படுகின்றது.



சட்டப்படல் B இனூடான நிலைக்குத்துக்கோடு பற்றி சமச்சீர் அற்றது. எனவே A, C இல் உள்ள மறுதாக்கங்கள் P, Q என குறிக்கப்படும்.

போவின் குறிப்பீடு

- இக்குறியீட்டுமுறை ''Bow'' என்ற கணிதவியலாளரால் அறிமுகம் செய்யப்பட்டதால் ''போவின் குறியீடு'' என அழைக்கப்படுகின்றது.
- இக்குறியீட்டு முறையில் சட்டப்படலில் தாக்கும் புறவிசைகள் யாவும் சட்டப்படலுக்கு வெளியிலுள்ள பிரதேசத்தில் குறிக்கப்படும்.
- இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட விசைகளிற்கு இடையில் அமையும் பிரதேசம் ஆங்கில சிறிய எழுத்துக்களால் அல்லது இலக்கங்களால் குறிக்கப்படும். பிரதேசங்கள் மூடியதாகவோ திறந்ததாகவோ இருக்கலாம்.
- விசையால் பிரிக்கப்படும் பிரதேசங்களுக்குரிய ஆங்கில எழுத்துக்கள் இரண்டின் சேர்க்கையினால் விசை குறிக்கப்படும்.

போவின் குறிப்பீட்டு முறையில் பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்

போவின் குறிப்பீட்டு முறையில் விசைகளையும் பிரதேசங்களையும் சட்டப்படலில் குறித்தபின் பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதற்குப் பின்வரும் படிகளைப் பின்பற்றுக.

(i) முதலில் தெரியாத விசைகள் குறைவாகக்காணப்படும் மூட்டின் சமநிலையை கருத்திற்கொண்டு உரியவிசை முக்கோணியை அல்லது விசைப் பல்கோணியை வரையவேண்டும். இப்பல்கோணியின் உச்சிகள் சட்டப்படலில் விசைகளால் வேறாக்கப்பட்ட பிரதேசங்களிற்குரிய ஆங்கில எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்திக் குறிக்கப்படும். இவ்வாறு எல்லாமூட்டிற்கும் விசைப் பல்கோணியை தொடர்ச்சியாக அமைக்குக. (இவ்விசைப் பல்கோணி மூடியதாக இருக்கும்.)

(ii) நீங்கள் வரைந்து பெற்ற விசை வரிப்படத்தில் உள்ள முக்கோணிகள், பல்கோணிகள் என்பவற்றில் திரிகோண கணித சூத்திரங்கள், அட்சரகணிதச் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி தகைப்புக்களைக் காணலாம்.

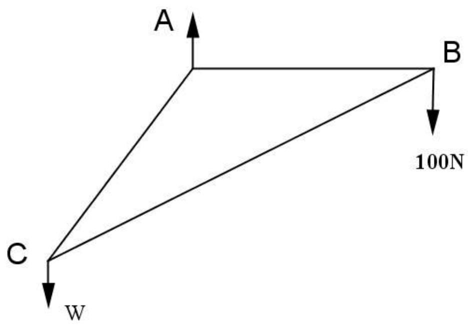
(iii) விசை வரிப்படத்தில் உள்ள விசைகளின் போக்கினை வாசிப்பதன்மூலம் சட்டப்படலில் உள்ள கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களின் திசையை அம்புக்குறி மூலம் குறிக்கவேண்டும்.

(iv) விசைப்பல்கோணியை வரையும்போது ஒரே போக்கினை எல்லா மூட்டுக்களுக்கும் பாவித்து வரையவேண்டும். (இடஞ்சுழிப்போக்கில் அல்லது வலஞ்சுழிப்போக்கில் கருதுதல்)

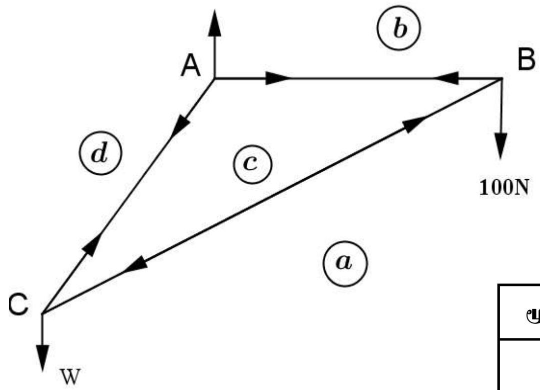
(v) மூட்டு ஒன்றிற்குரிய விசைப் பல்கோணியினை வரைய அம்மூட்டில் ஆகக்கூடியது 2 தெரியா விசைகள் இருக்கலாம்.

6.3 செய்து காட்டப்பட்ட உதாரணங்கள்

உதாரணம் 1

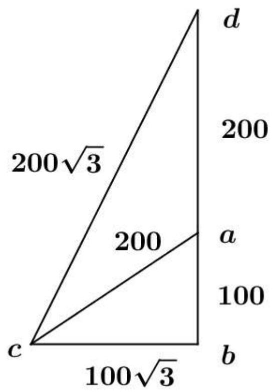


தரப்பட்ட உருவம் ABC யில், முக்கோண வடிவ சட்டப்படலானது AB, BC, CA எனும் இலேசான கோல்களைக் கொண்டது. இவை அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இங்கு $AB = AC$, $B\hat{A}C = 120^\circ$. இச்சட்டப்படல் ஆனது AB கிடையாக இருக்குமாறு நிலைக்குத்துத் தளமொன்றிலுள்ளது. இது A யிலுள்ள ஒப்பமான முனையொன்றில் பொறுத்திருக்க, முனை B யில் 100 N நிறை தொங்கவிடப்பட்டு சமநிலையிலுள்ளது. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி தொகுதிக்கான தகைப்பு வரிப்படத்தினை வரைக. இதனை உபயோகித்து கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களின் பருமனைக் கணித்து அவை, உதைப்பா, இழுவையா என வேறுபடுத்துக.



மூட்டு B யிலிருந்து ஆரம்பித்தால்,

மூட்டு	ஒழுங்கு	பல்கோணியின் பெயர்
B	$a \to b \to c \to a$	Δabc
C	$a \to c \to d \to a$	Δbcd



AB(bc) = இழுவை $= 100\sqrt{3}$ N

BC(ca) = உதைப்பு $= 200\sqrt{3}$ N

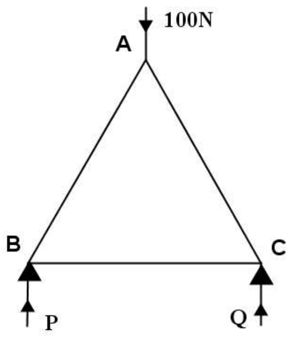
CA(cd) = இழுவை $= 200\sqrt{3}$ N

W(ad) = 200 N

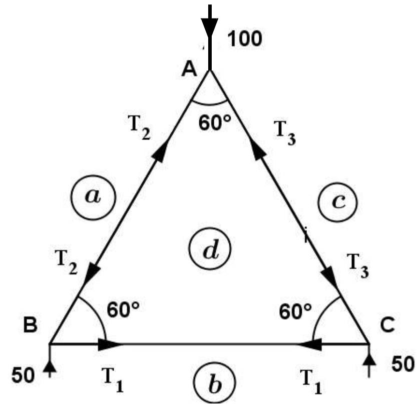
இப்பிரசினத்தில் எல்லா மூட்டுக்களும் மணிக்கூட்டுத் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் எடுக்கப்பட்டுள்ளன.

உதாரணம் 2

படத்தில் காட்டியவாறு மூன்று சமநீளம் கொண்ட இலேசான கோல்கள் AB, BC, CA ஆல் ஆக்கப்பட்ட சட்டப்படல் ஒரே கிடைமட்டத்தில் உள்ள இரு முனைகளில் B, C இருக்குமாறும் A இல் 100 N விசையொன்று தொங்கவிடப்பட்டும் சமநிலையில் உள்ளது. முனைகள் B, C இல் உள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படத்தைவரைக. இதிலிருந்து எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புக்களை இழுவையா அல்லது உதைப்பா எனக் குறிப்பிடுக.



தீர்வு



சட்டப்படலில் சமநிலைக்கு நிலைக்குத்து திசையில் விசைகளைப் பிரிக்க.

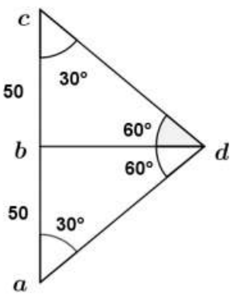
$$\uparrow P + Q = 100$$

சட்டப்படலானது A இன் ஊடான நிலைக்குத்து அச்சுப்பற்றி சமச்சீர்

$$P = Q = 50\,\text{N}$$

A, B, C இல் உள்ள விசைகள் சட்டப்படலுக்கு வெளியில் குறிக்கப்பட்டு விசைகளால் வேறாக்கப்பட்ட பிரதேசங்கள் a, b, c, d எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

தகைப்பு வரிப்படம்



இத்தகைப்பு வரிப்படம் மூட்டு C இல் ஆரம்பித்து இடஞ்சுழியாக முக்கோணி வரையப்பட்டு பின் மூட்டு A, B இற்கு வரையப்பட் டுள்ளது. இழுவை, உதைப்பு என்பன படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.

மூட்டு	ஒழுங்கு	பல்கோணியின் பெயர்
C	$b \to c \to d \to a$	Δbcd
A	$d \to c \to a \to d$	Δacd

பிரதேசங்களினால் உதைப்பு, இழுவைகள் குறிப்பிடப்படம்.

$$T_1 = bd = 50\tan 30^\circ = \frac{50}{\sqrt{3}}\ \text{N}$$

$$T_3 = cd = 50\sec 30^\circ = \frac{100}{\sqrt{3}}\ \text{N}$$

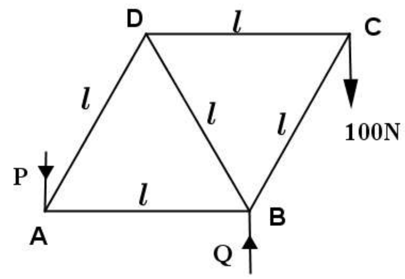
$$T_2 = ad = 50\sec 30^\circ = \frac{100}{\sqrt{3}}\ \text{N}$$

கோல்	தகைப்பு	உதைப்பு	இழுவை
AB	$\frac{100}{\sqrt{3}}$ N	✓	-
BC	$\frac{50}{\sqrt{3}}$ N	-	✓
AC	$\frac{100}{\sqrt{3}}$ N	✓	-

ஒவ்வொரு கூட்டிலும் இரு தெரியாத விசைகள் மட்டும் தொழிற்படுவதாக இந்த மூட்டிலும் ஆரம்பித்து வரையலாம்.

உதாரணம் 3

உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு சமநீளம் கொண்ட ஐந்து இலேசான கோல்களால் ஆக சட்டப்படல் B இல் தாங்கப்பட்டு A இல் ஒரு நிலைக்குத்து விசை பிரயோகிக்கப்பட்டும் C இல் 100N விசையொன்று தொங்கவிடப்பட்டும் சமநிலையில் உள்ளது. தகைப்பு வரிப்படம் வரைவதன்மூலம் கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களை துணிந்து அது இழுவையா அல்லது உதைப்பா என வேறுபடுத்துக.



சட்டப்படலின் சமநிலைக்கு நிலைக்குத்தாகத் துணிக.

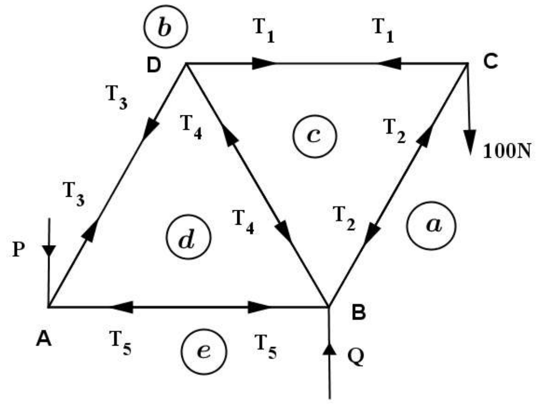
$\uparrow\ 100 + P = Q$ .... ①

A பற்றி திருப்பம் எடுக்க.

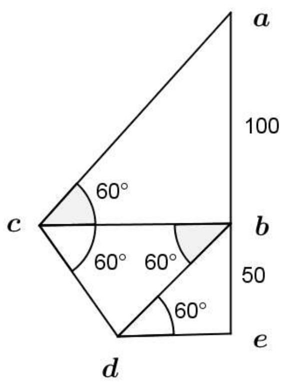
A) $Q.2\ell = 100\,(2\ell + 2\ell\cos 60^\circ)$ ....②

$Q = 100\,(1 + \tfrac{1}{2}) = 150$ N

① , ② $\Rightarrow$ $P = 50$ N , $Q = 150$ N



இடம்சுழியாக மூட்டுக்களின் விசைகளின் கருதுவோம்.



மூட்டு	ஒழுங்கு	பல்கோணியின் பெயர்
C	$a \to b \to c \to a$	Δabc
D	$c \to d \to c \to b$	Δbcd
A	$d \to b \to e \to d$	Δdbe
B	$c \to d \to e \to a \to c$	$\square acde$

இத்தகைப்பு வரிப்படம் மூட்டு C இல் ஆரம்பித்து இடஞ்சுழியாக விசைமுக்கோணம் வரையப்பட்டு பின் மூட்டு D, A இற்கு வரையப்பட்டுள்ளது. இழுவை, உதைப்பு என்பன படத்தில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது.

$T_1 = bc = 100 \tan 30° = \frac{100\sqrt{3}}{3}$ N

$T_2 = ac = 100 \sec 30° = \frac{200\sqrt{3}}{3}$ N

$T_3 = bd = 50 \operatorname{cosec} 60° = \frac{100\sqrt{3}}{3}$ N

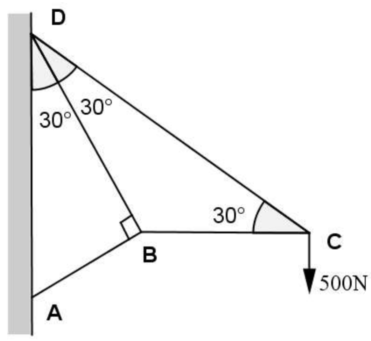
$T_4 = cd = bd = \frac{100\sqrt{3}}{3}$ N

$T_5 = dc = 50 \tan 30° = \frac{50\sqrt{3}}{3}$ N

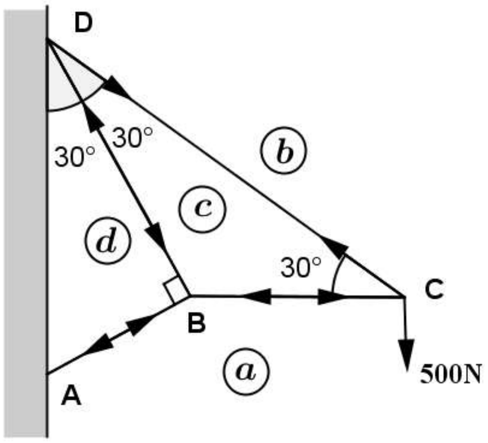
கோல்	உதைப்பு	வகை
DC	$\frac{100\sqrt{3}}{3}$ N	இழுவை
BC	$\frac{200\sqrt{3}}{3}$ N	உதைப்பு
AD	$\frac{100\sqrt{3}}{3}$ N	இழுவை
BD	$\frac{100\sqrt{3}}{3}$ N	உதைப்பு
AB	$\frac{50\sqrt{3}}{3}$ N	உதைப்பு

உதாரணம் 4

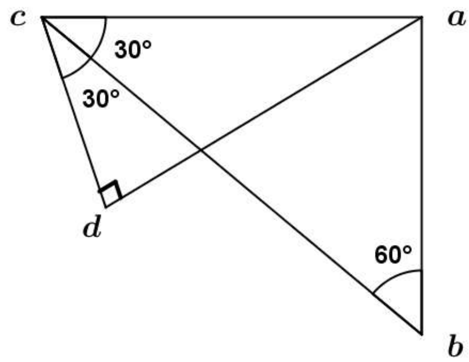
நான்கு இலேசான கோல்கள் AB, BC, CD, BD ஆல் ஆக்கப்பட்ட சட்டப்படல் உருவில் காட்டப்பட்டவாறு A, D என்பவற்றில் நிலைக்குத்தான சுவரொன்றுடன் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டு BC கிடையாக இருக்குமாறு மூட்டு C இல் 500 N நிறையொன்று தொங்கவிடப்பட்டு சமநிலையில் உள்ளது. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக. இதிலிருந்து எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புக்களைக் கண்டு இழுவையா அல்லது உதைப்பா எனக் குறிப்பிடுக.



தீர்வு



மூட்டு C இல் மூன்று விசைகள் மட்டுமே தாக்குகின்றன. அவற்றுள் ஒரு விசையின் பருமனும் திசையும் தெரிவதோடு, ஏனைய இரு விசைகளின் திசைகள் மட்டும் தெரிந்தவை. எனவே மூட்டு C இன் சமநிலைக்குரிய விசை முக்கோணியை முதலில் வரைவோம்.



மூட்டு	ஒழுங்கு	பல்கோணியின் பெயர்
C	$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$	Δabc
B	$a \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$	Δacd

bc = 500 sec 60° = 1 000 N

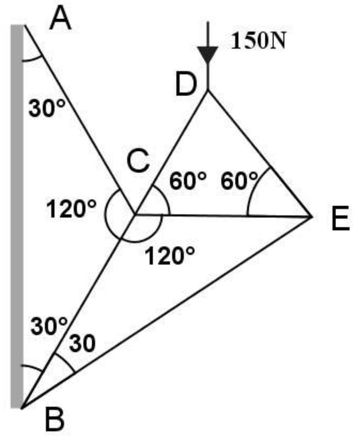
ac = 500 tan 60° = $500\sqrt{3}$ N

cd = ($500\sqrt{3}$ N) sin 30° = $250\sqrt{3}$ N

ad = $500\sqrt{3}$ N cos 30° = 750 N

கோல்	தகைப்பு	உதைப்பு	இழுவை
DC	1 000 N	-	✓
BC	$500\sqrt{3}$ N	✓	-
BD	$250\sqrt{3}$ N	✓	-
AB	750 N	✓	-

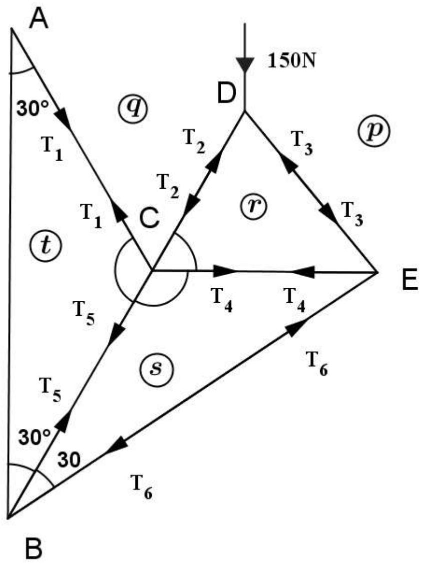
உதாரணம் 5

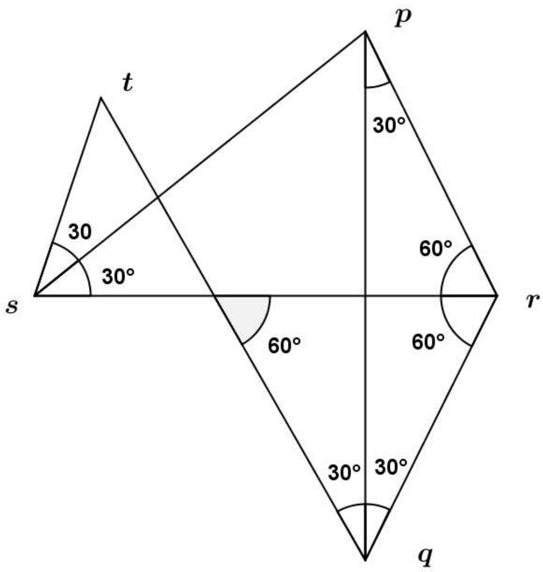


படத்தில் காட்டியவாறு A, B என்பவற்றில் நிலைக்குத்தான சுவரொன்றுடன் சுயாதீனமாக பிணைக்கப்பட்டு CE கிடையாக இருக்குமாறு மூட்டு D இல் 150 N நிறையொன்று தொங்கவிடப்பட்டு சமநிலையில் உள்ளது. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக. இதிலிருந்து எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புக்கள் இழுவையா அல்லது உதைப்பா எனக் குறிப்பிடுக.

மூட்டு D இல் மட்டும் இரு விசைகளின் பருமன் தெரிந்துள்ளது. எனவே D இலிருந்தே வரைய ஆரம்பிக்கலாம்.

மூட்டு	ஒழுங்கு	பல்கோணியின் பெயர்
D	$p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow p$	Δpqr
E	$p \rightarrow r \rightarrow s \rightarrow p$	Δprs
C	$r \rightarrow q \rightarrow t \rightarrow s \rightarrow r$	▭$rqts$





$AC = qt = 75\sqrt{3} + 25\sqrt{3} = 100\sqrt{3}$ N

$CD = qr = 75 \sec 30° = 50\sqrt{3}$ N

$DE = pr = qr = 50\sqrt{3}$ N

$CE = sr = 100\sqrt{3}$ N

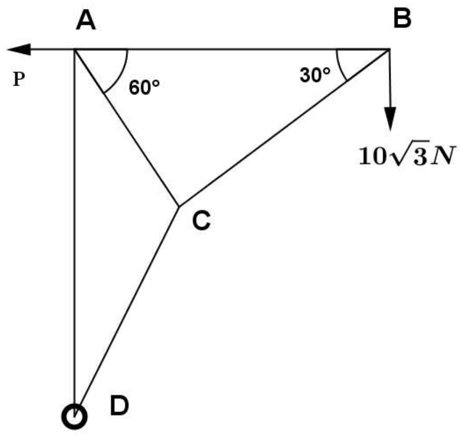
$BC = st = 50\sqrt{3}$ N

$BE = ps = 150\sqrt{3}$ N

கோல்	தகைப்பு	உதைப்பு	இழுவை
AC	$100\sqrt{3}$ N	-	✓
CD	$50\sqrt{3}$ N	✓	-
DE	$50\sqrt{3}$ N	✓	-
CE	$100\sqrt{3}$ N	-	✓
BC	$50\sqrt{3}$ N	-	✓
BE	$150\sqrt{3}$ N	-	✓

உதாரணம் 6

வரிப்படத்தில் காட்டியவாறு ஐந்து இலேசான கோல்கள் அவற்றின் முனைகளில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டு ஒரு சட்டப்படலை அமைக்கின்றது $10\sqrt{3}$ N சுமையொன்று B இல் இருந்து தொங்குகின்றது. AD நிலைக்குத்தாய் அமையும் வண்ணம் D இல் பிணைக்கப்பட்டும் A இல் BA வழியே ஒரு விசை P கொடுக்கப்பட்டும் AB கிடையாக அமையும்வண்ணம் சமநிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.



1. P இன் பருமன் யாது?
2. D இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமன், திசை என்பவற்றைகாண்க.
3. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படம் வரைந்து கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களைக் கண்டு அது இழுவையா, உதைப்பா எனக் குறிப்பிடுக.

தீர்வு

1. தொகுதியின் சமநிலைக்கு D பற்றி திருப்பம் எடுக்க.

$$D) \quad P.AD - 10\sqrt{3}\,AB = 0$$

ஆனால், $AD = 2\,AC \cos 30°$

$= 2\,AB \cos 60° \cos 30°$

$$AD = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$$

$$\therefore \quad P.\frac{\sqrt{3}}{2}AB = 10\sqrt{3}\,AB$$

$$\therefore \quad P = 20 \text{ N}$$

D இல் உள்ள மறுதாக்கம் R என்க. அது கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் θ என்க.

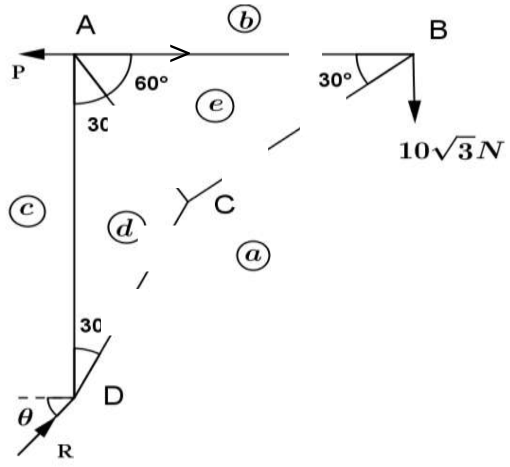
தொகுதியின் சமநிலைக்கு,

$$\uparrow R\sin\theta = 10\sqrt{3}$$

$$\rightarrow R\cos\theta = P = 20\text{ N}$$

$$R = \sqrt{\left(10\sqrt{3}\right)^2 + 20^2} = 10\sqrt{7}$$

$$\tan\theta = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ; \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

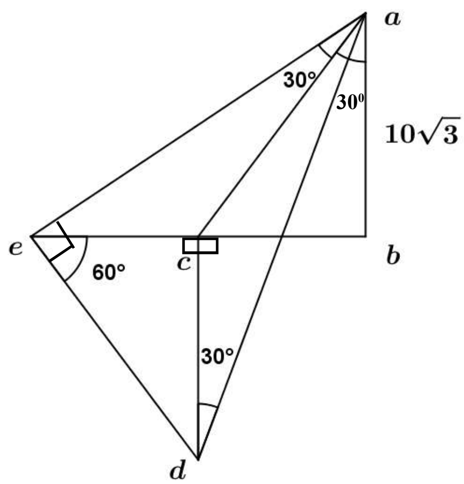


இத்தொகுதி மூன்று விசைகளின் கீழ் சமநிலையில் உள்ளதால் மறுதாக்கம் R புள்ளி B இன் ஊடு செல்ல வேண்டும்.

மூட்டு B இல் ஆரம்பித்து இடஞ்சுழியாக விசைப்பல்கோணி வரையப்பட்டு பின் மூட்டு A, C இற்கு வரையப்பட்டுள்ளது.

மூட்டு	ஒழுங்கு	பல்கோணியின் பெயர்
B	$a \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow a$	Δabd
C	$a \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow a$	Δaed

கோல்	தகைப்பு	பருமன்
AB	இழுவை	30 N
BC	உதைப்பு	$20\sqrt{3}$ N
AC	உதைப்பு	20 N
DC	உதைப்பு	40 N
AD	இழுவை	$10\sqrt{3}$ N



$$be = 10\sqrt{3}\tan 60 \\ = 30$$

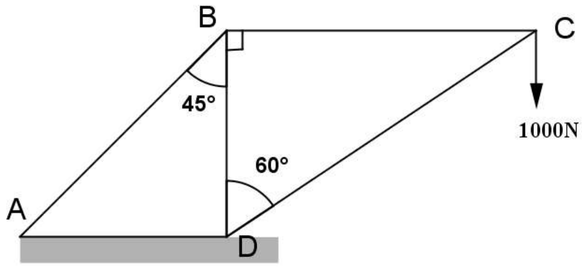
$$ae = 10\sqrt{3}\sec 60 \\ = 20\sqrt{3}$$

$$ad = 20\sqrt{3}\sec 30 \\ = 40$$

$$ed = ae\tan 30 \\ = 20$$

$$cd = ed\sin 60 \\ = 10\sqrt{3}$$

உதாரணம் 7

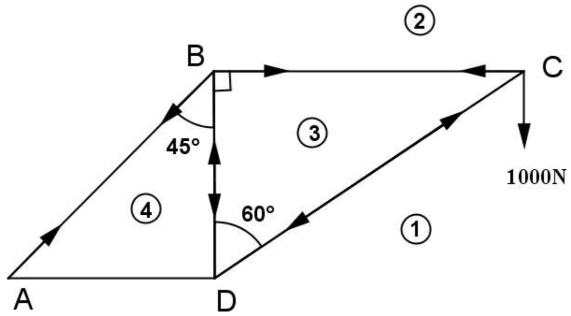


ஒப்பமான மூட்டப்பட்ட ஐந்து இலேசான கோல்களினால் ஆக சட்டப்படல் உருவில் காட்டியவாறு BC கிடையாகவும் BD நிலைக்குத்தாகவும் இருக்குமாறு A, D ஆனது கிடையான தளத்தில் நிலைப் படுத்தப்பட்டு C இல் 1000 N நிறை தொங்கிக் கொண்டிருக்க சமநிலையில் உள்ளது. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து கோல்களில் உள்ள இழுவை, உதைப்பை காண்க.

தீர்வு

மூட்டு C இல் ஆரம்பித்து இடஞ்சுழியாக விசைப்பல்கோணி வரையப்பட்டுள்ளது.

மூட்டு	ஒழுங்கு	பல்கோணியின் பெயர்
C	$1 \to 2 \to 3 \to 1$	$\Delta 123$
B	$3 \to 2 \to 4 \to 3$	$\Delta 324$



$AB = km = 1000\sqrt{6}$ N

$BC = kl = 1\,000 \cot 30^0 = 1\,000\sqrt{3}$ N

$CD = lj = 1\,000 \operatorname{cosec} 30° = 2\,000$ N

$BD = ml = kl = P.\ell \cos 30° - 10\sqrt{3}\ .\ 2\ell = 0$

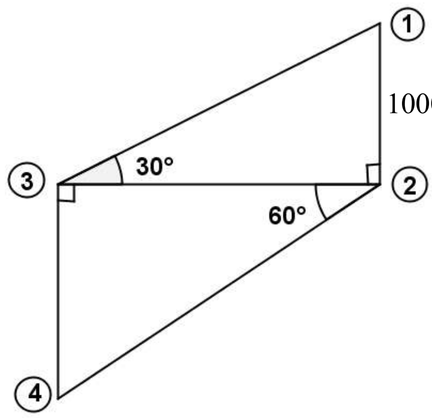
$\Rightarrow P = 40$ N

$\rightarrow\ P = R\cos\theta = 40$ N

$\uparrow R\sin\theta = 10\sqrt{3}$ N

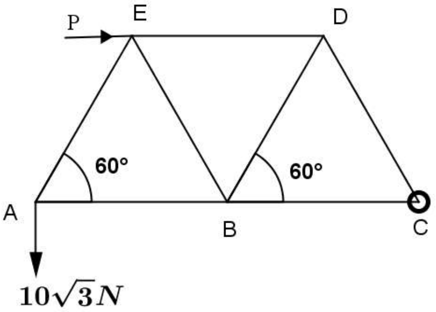
$R = \sqrt{40^2 + \left(10\sqrt{3}\right)^2}$ N

$R = 10\sqrt{19}$ N

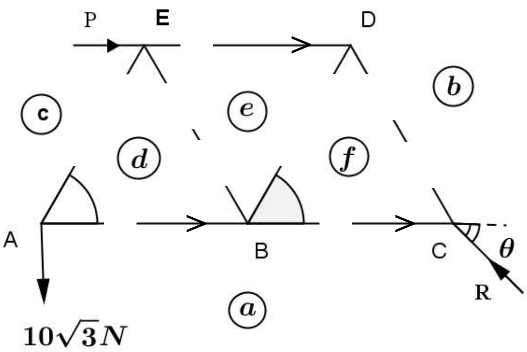


கோல்	தகைப்பு	இழுவை	உதைப்பு
AB	$1000\sqrt{6}$ N	✓	-
BC	$1000\sqrt{3}$ N	✓	-
CD	$2\,000$ N	-	✓
BD	$1000\sqrt{3}$ N	-	✓

உதாரணம் 8



ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட ஏழு இலேசான கோல்களிலான சட்டப்படல் உருவில் காட்டியவாறு C இல் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. A இல் இருந்து $10\sqrt{3}$ N நிறை தொங்கிக் கொண்டிருக்க ED கிடையாக இருக்குமாறு E இல் ஒரு கிடை விசை P பிரயோகிப்பதன் மூலம் தொகுதி நிலைக்குத்து தளத்தில் சமநிலையில் உள்ளது.



1. P இன் பருமனைக் காண்க.
2. பிணையல் C இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.
3. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து கோல்களில் உள்ள தகைப்பைக் காண்க.
4. தகைப்புக்களை இழுவையா அல்லது உதைப்பா என வேறுபடுத்துக.

தீர்வு

தொகுதியின் சமநிலைக்கு C பற்றி திருப்பம் எடுக்க.

$P.\ell\cos 30^0 - 10\sqrt{3}.2\ell = 0$ (இங்கு ℓ கோலின் நீளம் ஆகும்.)

$\Rightarrow P = 40N$

தொகுதியின் சமநிலைக்கு

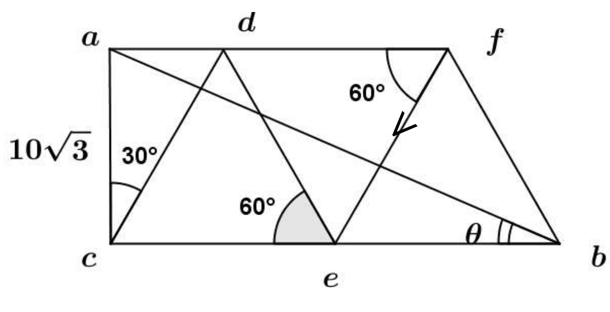
$\rightarrow$ $P = R\cos\theta = 40N$

$\uparrow R\sin\theta = 10\sqrt{3}N$

$R = \sqrt{40^2 + \left(10\sqrt{3}\right)^2}$

$R = 10\sqrt{19}N$

$\tan\theta = \dfrac{10\sqrt{3}}{40} \;\Rightarrow\; \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$



மூட்டு A இல் ஆரம்பித்து இடஞ்சுழியாக வரிப்படம் வரையப்பட்டுள்ளது.

$AB = ad = 10\sqrt{3}\tan 30° = 10\text{ N}$

$AE = cd = 10\sqrt{3}\sec 30° = 20\text{ N}$

$cd = de = 20\text{ N}$

$AE = BE = 20\text{ N}$

$bf = de = ef = df = 20\text{ N}$

$CD = DE = BD = 20\text{ N}$

கோல்	தகைப்பு	வகை
AB	10 N	உதைப்பு
BC	30 N	உதைப்பு
CD	20 N	உதைப்பு
DE	20 N	உதைப்பு
EA	20 N	இழுவை
EB	20 N	உதைப்பு
DB	20 N	இழுவை

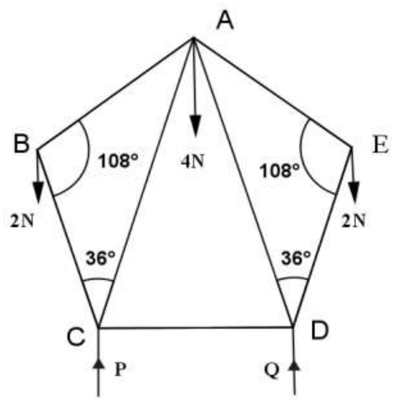
c யில் மறுதாக்கம் ab ஆல் குறிப்பிடப்படும்.

$$ab^2 = \left(10\sqrt{3}\right)^2 + 40^2$$

$$ab = 10\sqrt{19}$$

உதாரணம் 9

ஏழு இலேசான கோல்கள் படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு ABCDE என்னும் ஒழுங்கான ஐங்கோண வடிவான சட்டப்படல் ஆக்கப்பட்டுள்ளது. அது CD கிடையாக இருக்குமாறு C, D என்னும் முனைகளில் நிலைக்குத்து விசைகள் முறையே P, Q வினாலும் A, B, E முனைகளில் 4, 2, 2 N விசைகள் தொங்கவிடப்பட்டும் நிலைக்குத்து தளத்தில் சமநிலையில் உள்ளது. தகைப்பு வரிப்படம் ஒன்றைப் பரும்படியாக வரைந்து கோல்களில் உள்ள



தகைப்புக்களின் செப்பமான பெறுமானங்களைக் கணித்து இழுவைகளையும் உதைப்புக்களையும் வேறுபடுத்துக. உதைப்புக்களை $\cos\frac{n\pi}{10}$ களில் காண்க. இங்கு n ஆனது நேர் முழுஎண் ஆகும்.

தொகுதியின் சமநிலைக்கு,

$$\uparrow \quad P + Q = 8\text{ N}$$

தொகுதி A இன் ஊடான நிலைக்குத்து கோடு பற்றிச் சமச்சீர் என்பதால்,

$$P = a$$
$$P = Q = 4\text{ N}$$

இங்கு தகைப்பு வரிப்படம் மூட்டு B இல் ஆரம்பித்து இடஞ்சுழியாக விசைப்பல்கோணி வரையப்பட்டு பின் மூட்டு A, C, E இங்கு வரையப்பட்டுள்ளது.

$n = 18° \ (\text{say}) = \dfrac{\pi}{10}$

de = ec = ca = ab = 2 N

gc = x என்க.

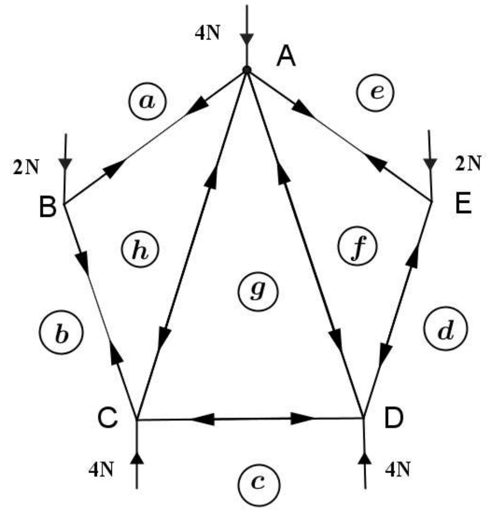
pc = $x \tan 4n°$ ஆகும்.

AB(bc) = இழுவை $= 100\sqrt{3}$ N

BC(ca) = உதைப்பு $= 200\sqrt{3}$ N

CA(cd) = இழுவை $= 200\sqrt{3}$ N

W(ad) = 200 N



இந்தப் பிரசினத்தில் எல்லா மூட்டுக்களும் மணிக்கூட்டுத் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் எடுக்கப்பட்டுள்ளன.

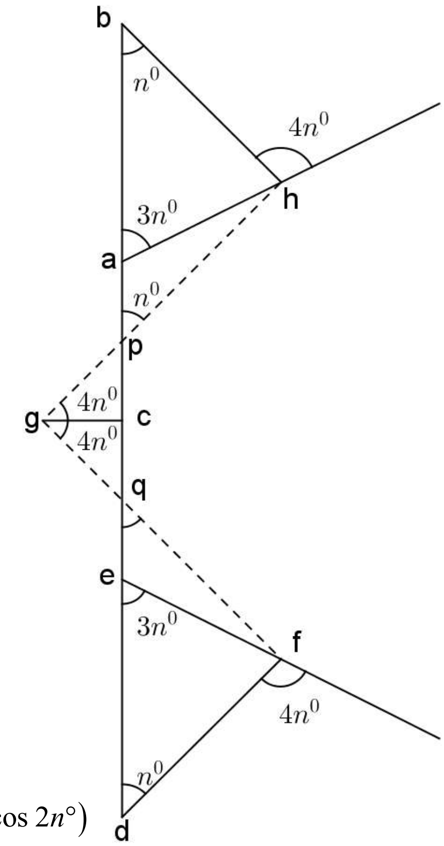
Δbhp, Δqgp, Δgfd என்பன இருசமபக்க முக்கோணங்கள் ஆகும்.

Δabh இல்,

$$\text{BC} \rightarrow \text{bh} = \frac{2\sin 3n°}{\sin 4n°} = \frac{2\cos 2n°}{\cos n°}$$

$$\text{AB} \rightarrow \text{ah} = \frac{2\sin n°}{\sin 4n°} = \frac{2\cos 4n°}{\cos n°}$$

இழுவைகள்	**உதைப்புகள்**
(i) AB $\rightarrow$ ah	(i) BC $\rightarrow$ bh
(ii) AE $\rightarrow$ ef	(ii) ED $\rightarrow$ df
(iii) CD $\rightarrow$ cg	(iii) AC $\rightarrow$ gh
	(iv) AD $\rightarrow$ gf



Δbhp இல்,

$$\frac{4 - \tan 4n°}{\sin 2n°} = \frac{bh}{\sin n°}$$

$$x = \frac{4(1 - \cos 2n°)}{\tan 4n°}$$

$$\text{gh} = \text{gp} + \text{ph} = \frac{x}{\cos 4n°} + \frac{2\cos 2n°}{\cos n°} = \frac{2}{\cos n°}(2 - \cos 2n°)$$

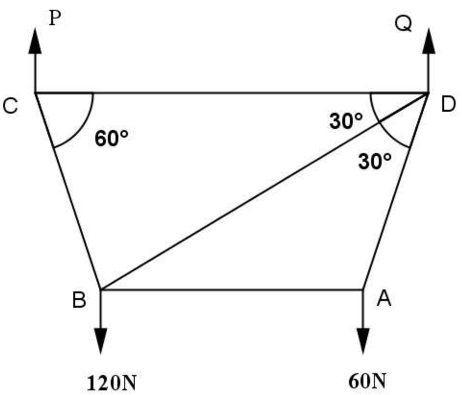
சமச்சீரால், AD $\rightarrow$ gh, AE $\rightarrow$ ah, ED $\rightarrow$ bh

தொகுதி A இன் ஊடான நிலைக்குத்து கோடு பற்றி சமச்சீர் என்பதால்,

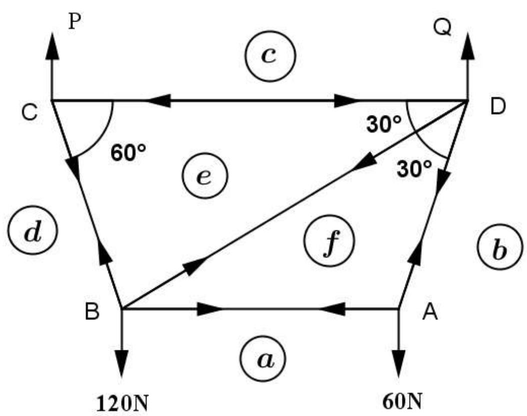
gf = gh, ef = ah, df = bh

கோல்	இழுவை	உதைப்பு
AB	$\frac{2\cos 4n^\circ}{\cos n^\circ}$ N	-
AE	$\frac{2\cos 4n^\circ}{\cos n^\circ}$ N	-
CD	2N	-
BC	-	$\frac{2\cos 2n^\circ}{\cos n^\circ}$ N
ED	-	$\frac{2\cos 2n^\circ}{\cos n^\circ}$ N
AC	-	$\frac{2\left(2-\cos 2n^\circ\right)}{\cos n^\circ}$ N
AD	-	$\frac{2\left(2-\cos 2n^\circ\right)}{\cos n^\circ}$ N

உதாரணம் 10



ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட ஐந்து இலேசான கோல்களால் ஆன சட்டப்படல் உருவில் காட்டியவாறு C, D இல் இருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. A, B இல் முறையே 60, 120 N நிறைகள் தொங்கிக் கொண்டிருக்க AB, CD கோல்கள் கிடையாக இருக்க சமநிலையில் உள்ளது.



போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க. தகைப்புக்கள் இழுவையா, உதைப்பா என இனங்காண்க.

தொகுதியின் சமநிலைக்கு,

$\uparrow P+Q-120-60=0$

$P+Q=180\text{N}$

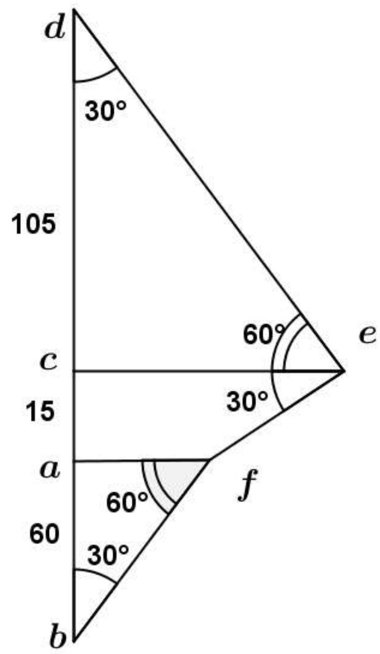
D பற்றி திருப்பம் எடுக்க.

$P.\ 2\ell - 60.\ell\cos 60 - 120.\ell + \ell\cos 60 = 0$

$2P = 30 + 180$

$\Rightarrow P = 105N$

$\Rightarrow Q = 180 - 105 = 75N$



மூட்டு C இல் ஆரம்பித்து இடஞ்சுழியாக விசைப்பல்கோணி வரையப்பட்டுள்ளது.

C **B** **A**

படி I : C **படி II : B** **படி III : A**

$AB = af = 60\tan 30° = 20\sqrt{3}\ N$

$BC = ed = 105\sec 30° = 70\sqrt{3}\ N$

$CD = ec = 105\tan 30° = 35\sqrt{3}\ N$

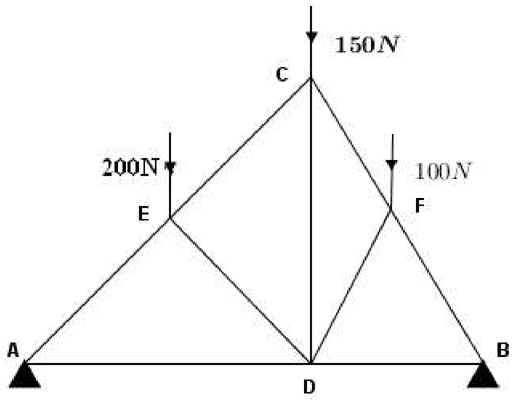
$AD = bf = 60\sec 30° = 40\sqrt{3}\ N$

$BD = ef = 15\sec 30° = 10\sqrt{3}\ N$

கோல்	**தகைப்பு**	**வகை**
AB	$20\sqrt{3}$ N	இழுவை
BC	$70\sqrt{3}$ N	இழுவை
CD	$35\sqrt{3}$ N	உதைப்பு
AD	$40\sqrt{3}$ N	இழுவை
BD	$10\sqrt{3}$ N	இழுவை

6.4 பயிற்சி

1.

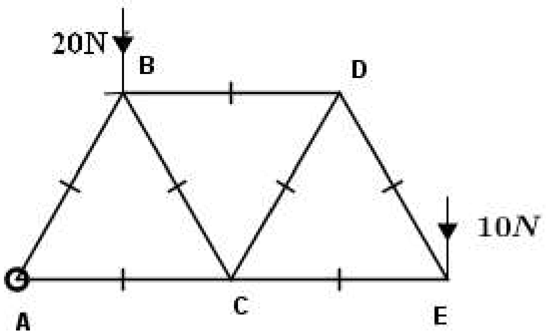


ஒப்பமான மூட்டப்பட்ட ஒன்பது இலேசான கோல்களைக் கொண்ட சட்டப்படல் ஒன்றை உரு காட்டுகின்றது. DC நிலைக்குத்தாகவும் AB கிடையாகவும் E,C, F களில் முறையே 200 N, 150 N, 100 N சுமைகளைத் தாங்கிக்கொண்டும் A இலும் B இலும் ஒப்பமான தாங்கிகளின் மீது ஓய்வில் இருக்கின்றது.

i. A, B இல் உள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

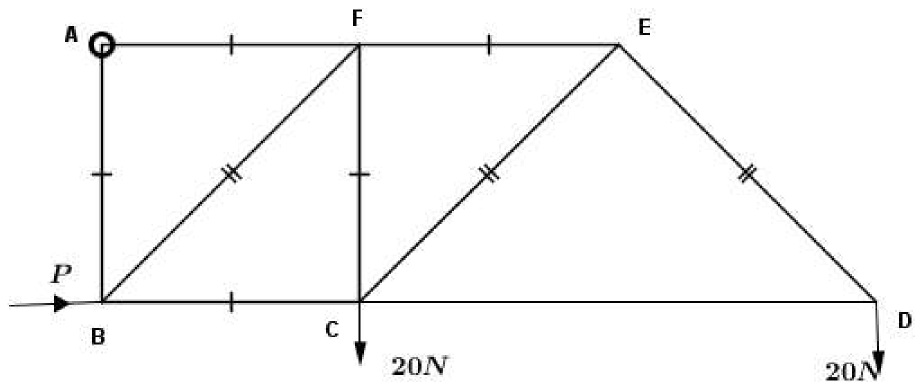
ii. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படம் வரைந்து கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களை காண்க.

2.



ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட ஏழு இலேசான கோல்களைக் கொண்ட சட்டப்படல் உருவில் காட்டியவாறு A இல் பிணைக்கப்பட்டும் B, E இல் முறையே 20, 10N நிறைகள் தொங்கவிடப்பட்டும் B இல் ஒரு கிடைவிசை P இனால் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சமநிலையில் உள்ளது. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படம் வரைவதன்மூலம் கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க. தகைப்புக்கள் இழுவையா அல்லது உதைப்பா என இனங்காண்க.

3.

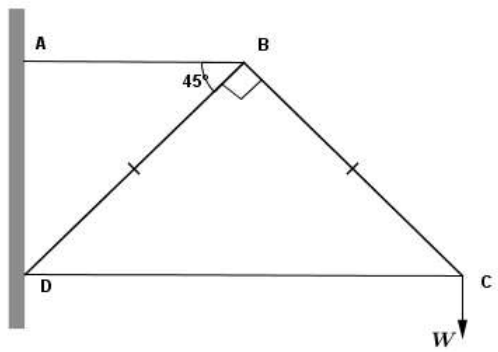


ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட ஒன்றது இலேசான கோல்களாலான சட்டப்படல் A இல் பணைக்கப்பட்டும் C, D இல் 20 N நிறைகள் தொங்கவிடப்பட்டும் B இல் ஒரு கிடைவிசை P இனால் சமநிலையில் உள்ளது.

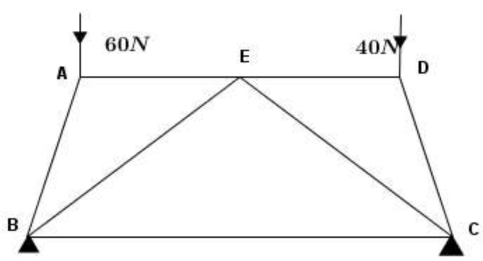
i. P இன் பருமனையும் மூட்டு A இல் உள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

ii. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படம் வரைவதன் மூலம் கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களை காண்க. தகைப்புக்களை இழுவையா, உதைப்பா என இனங்காண்க.

4. ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட நான்கு இலேசான கோல்களால் ஆன சட்டப்படல் உருவில் காட்டியவாறு A, D முனைகள் நிலையான சுவரில் பிணைக்கப்பட்டும் C இல் நிறை W தொங்கவிடப்பட்டும் சமநிலையில் உள்ளது. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படம் வரைவதன் மூலம் கோல்களில் உள்ள தகைப்புக் களைக் காண்க. தகைப்புக்கள் இழுவையா அல்லது உதைப்பா என வேறுபடுத்துக.

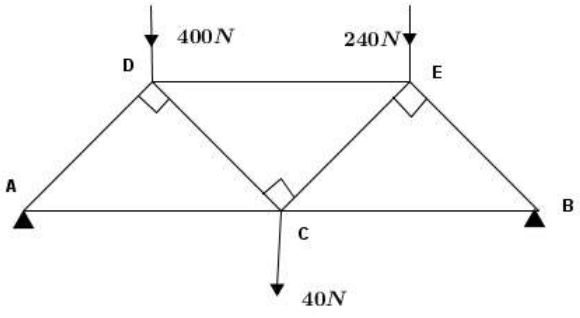


5. ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட ஏழு இலேசான கோல்களால் ஆன சட்டப்படல் உருவில் காட்டியவாறு BC கிடையாக இருக்குமாறு B, C இரு நிலையான தாங்கிகளில் வைக்கப்பட்டு A, D இல் முறையே 60 N, 40 N நிறைகள் தொங்கவிடப்பட்டு சமநிலையில் உள்ளது.



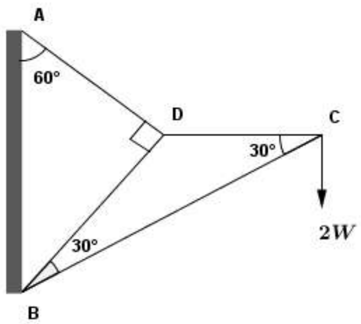
இங்கு $E\hat{B}C = E\hat{C}B = A\hat{B}E = D\hat{C}E = A\hat{E}B = D\hat{E}C = \pi/6$ ஆகும். போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.

6. மேலே உள்ள உருவிற் காட்டப்பட்டிருக்கும் சட்டப்படல் இலேசானவையும் சமமானவையும் சுயாதீனமாக %I ; ggl ; i t Akhd AB, BC, CE, BD, BE, DE, AD என்னும் ஏழு கோல்களைக் கொண்டுள்ளது. அது அதன் தளம் நிலைக்குத்தாகவும் ACB கிடையாகவும் இருக்க A யிலும் C யிலும் சுயாதீனமாகத் தாங்கப்பட்டு D, E, C ஆகியவற்றில் முறையே 400 N , 240 N, 40 N என்னும் சுமைகளைக் காவுகின்றது.



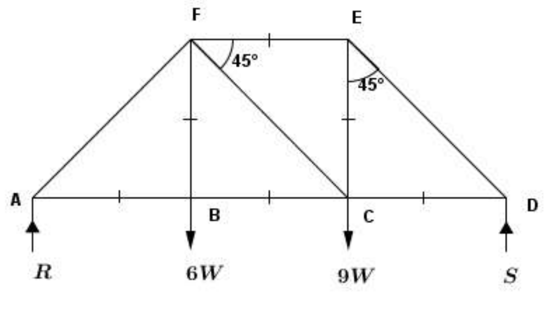
தகைப்பு வரிப்படம் ஒன்றை வரைந்து இதிலிருந்து ஒவ்வொரு கோலிலும் உள்ள தகைப்பைக் கண்டு இழுவைகளையும் உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

7.



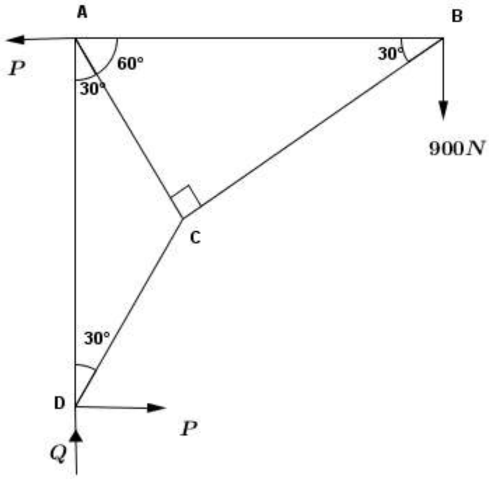
ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட நான்கு இலேசான கோல்களால் ஆன நட்டப்படல் உருவில் காட்டியவாறு A, B நிலையான சுவரில் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டும் C இல் 2W நிறை தொங்கவிடப்பட்டும் சமநிலையில் உள்ளது. தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைவதன்மூலம் எல்லாக்கோல்களில் உள்ள தகைப்புகளைக் காண்க. அத்துடன் A, B இல் உள்ள மறுதாக்கங்களையும் காண்க.

8. ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட ஒன்பது இலேசான கோல்களால் ஆன சட்டப்படல் உருவில் காட்டியவாறு AD கிடையாக இருக்குமாறு A யிலும் D யிலும் சுயாதீனமாகத் தாங்கப்பட்டு B, C இல் முறையே 6W, 9W நிறைகளைக் காவுகின்றது.

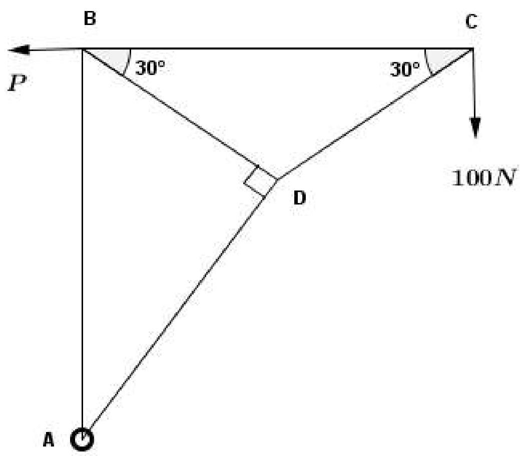


சமநிலையில் A, D இல் உள்ள மறுதாக்கங்களை காண்க. தகைப்பு வரிப்படம் வரைவதன் மூலம் கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களை கண்டு அது இழுவையா அல்லது உதைப்பா என வேறுபடுத்துக.

9. வரிப்படத்தில் காட்டியவாறு ஐந்து இலேசான கோல்கள் அவற்றின் முனைகளில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டு ஒரு சட்டப்படலை அமைக்கின்றது. 900 N நிறை B இல் இருந்து தொங்குகின்றது. AD நிலைக்குத்தாய் அமையும்வண்ணம் P, (P, Q) என்னும் விசைகள் முறையே A, D என்பவற்றில் பிரயோகித்து சட்டப்படலானது சமநிலையில் நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. (P கிடையாகவும் Q நிலைக்குத்தாகவும்) P, Q இன் பருமன்கள் யாது? தகைப்பு வரிப்படம் மூலம் கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.



10.



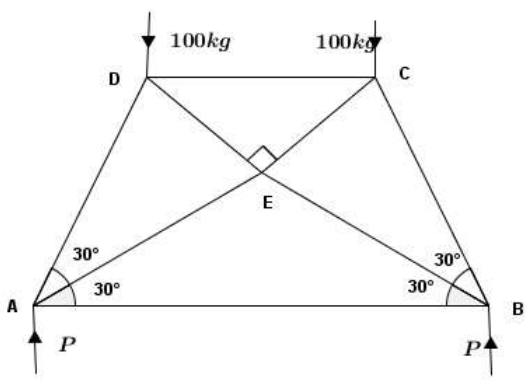
ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட ஐந்து இலேசான கோல்களால் ஆன சட்டப்படல் உருவில் காட்டியவாறு A இல் சுயாதீனமாக பிணைக்கப்பட்டும் C இல் 100 N நிறை தொங்கவிடப்பட்டும் உள்ளது. B இல் ஒரு CB வழியேயான கிடைவிசை P இனால் AB நிலைக்குத்தாகவும் BC கிடையாகவும் இருக்குமாறு சமநிலையில் உள்ளது.

இங்கு $D\hat{B}C = D\hat{C}B = 30^0,\ A\hat{D}B = 90^0$ ஆகும்.

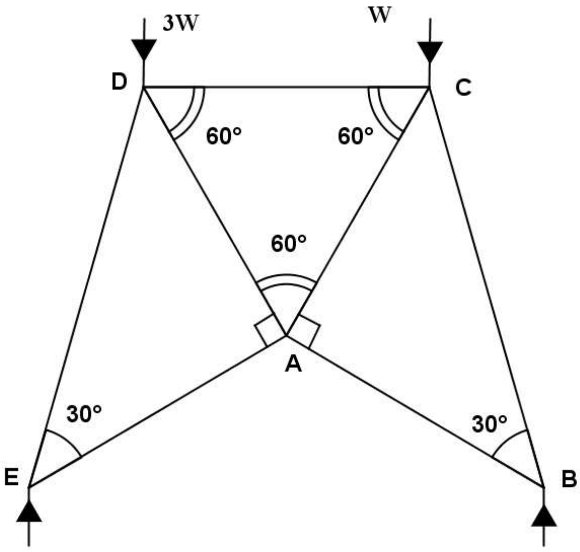
P இன் பருமனைக் காண்க. மூட்டு A இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளைக் காண்க. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைவதன் மூலம் கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.

11. எட்டு இலேசான கோல்களால் ஆன சட்டப்படல் A, B இல் உள்ள இரு தாங்கிகளில் ஓய்வில் உள்ளது.

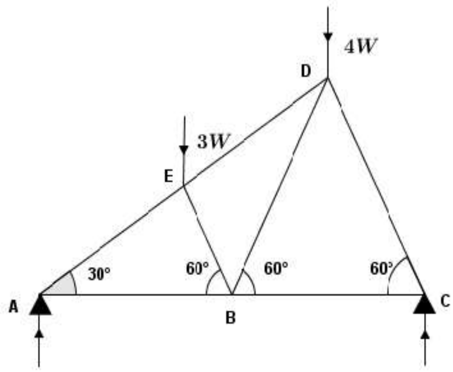
$AD = AE = BC = BE$ தாங்கிகளில் உள்ள மறுதாக்கங்களைக் கண்டு கோல் DC இல் உள்ள மறுதாக்கத்தை x எனக் கொண்டு தகைப்பு வரிப்படம் வரைந்து கோல் AB இல் உள்ள தகைப்பு $y = 100 - (-1)x$ எனக் காட்டுக. x, y இன் பெறுமானங்களை ஏன் ஒரே வேளையிற் காண இயலாது எனக் காட்டுக. கோல்கள் AB, DC இலுள்ள தகைப்புக்கள் சமன் எனில் கோல்களின் உள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.



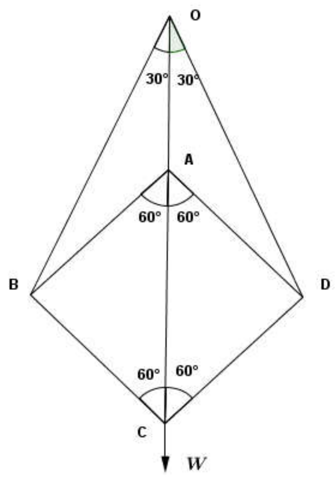
12. ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட ஏழு இலேசான கோல்களால் ஆன சட்டப்படல் உருவில் காட்டியவாறு 2W, W நிறைகள் D, C இல் தொங்க விடப்பட்டும் ஒரே கிடை மட்டத்தில் உள்ள E இலும் B இலும் நிலைக்குத்தான விசைகள் தாக்குவதன் மூலம் சமநிலையில் உள்ளது. தகைப்பு வரிப்படம் வரைவதன்மூலம் கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களை காண்க. அத்தகைப்புக்களை இழுவையா அல்லது உதைப்பா என வேறுபடுத்துக.



13. ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட ஏழு இலேசான கோல்கள் ஆன சட்டப்படல் உருவில் காட்டியவாறு E, D இல் முறையே 3W, 4W நிறைகள் சுமையேற்றப்பட்டு ABC கிடையாக இருக்குமாறு A இலும் C இலும் சுயாதீனமாக தாங்கப்பட்டுள்ளது. A, C இல் உள்ள மறுதாக்கங்களை காண்க. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படம் வரைந்து கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களை காண்க.

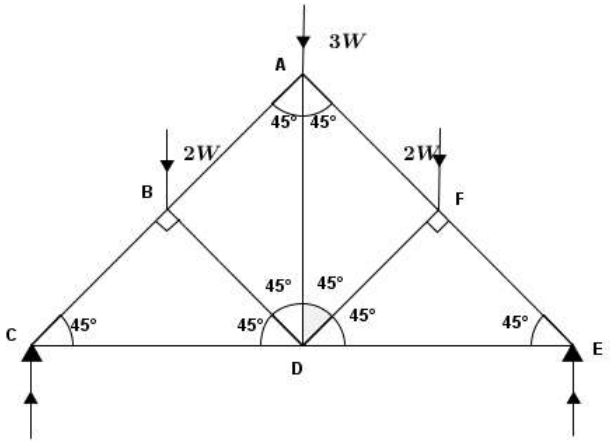


14.



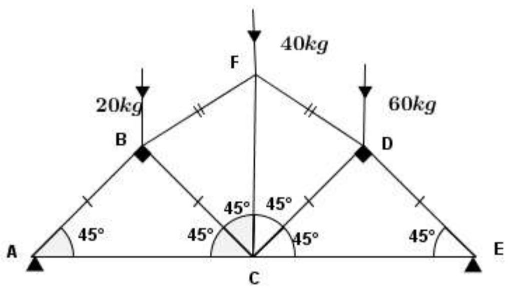
ஒப்பமான மூட்டப்பட்ட நான்கு இலேசான கோல்களால் ஆன சாய்சதுர வடிவான ABCD என்னும் சட்டப்படல் A இல் இருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இங்கு OB, OD சமநீளமுள்ள நீளா இழையும் OA இலேசான A இல் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டதுமான கோலும் ஆகும். C இல் W நிறை தொங்கவிடப்பட்டும் மூலைவிட்டம் AC நிலைக்குத்தாகவும் உள்ளது. இங்கு $A\hat{B}C = B\hat{O}D = 60^0$ ஆகும். தகைப்பு வரிப்படம் வரைவதன் மூலம் கோல்களில் உள்ள தகைப்புக் களையும் இழையில் உள்ள இழுவைகளையும் காண்க.

15. ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட ஒன்பது இலேசான கோல்களைக் கொண்ட சட்டப்படல் ஒன்றை உரு காட்டுகிறது. DA நிலைக் குத்தாக வுள்ளது. சட்டப்படல் A இல் 3W, B இல் 3W, F இல் W ஆகிய சுமைகளைக் காவுகிறது. C யும் E யும் ஒப்பமான தாங்கிகள் மீது ஓய்விலிருக்கின்றது.



தகைப்பு வரிப்படம் வரைவதன் மூலம் கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க. தகைப்புக்கள் இழுவையா அல்லது உதைப்பா என இனங்காண்க.

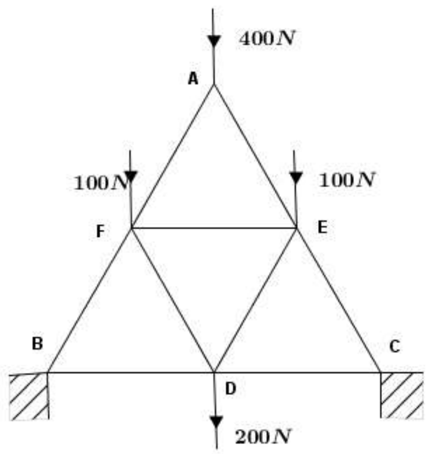
16.



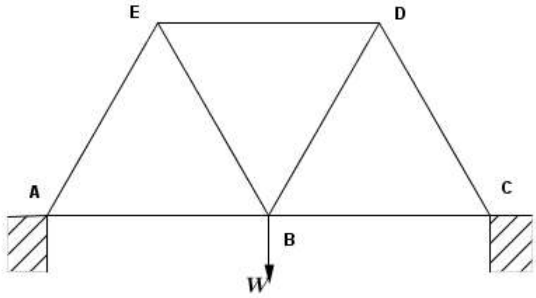
இவ்வுரு இலேசான கோல்களாலான சட்டப்படல் ஒன்றை வகைக்குறிக்கிறது. உருவில் காட்டப்பட்டவாறு B, F, D ஆகிய மூட்டுகளில் முறையே 20 kg, 40kg, 60 kg சுமைகள் ஏற்றப்பட்டுள்ளன. AC, CE ஆகியன கிடையானவை. இவை ஒவ்வொன்றும் 10 m நீளமுள்ளவை. CF = 8 m அதோடு நீளங்கள் AB = BC = CD = DE, BF = FD ஆகும். A, E ஆகியவற்றில் உள்ள மறுதாக்கங்கள் நிலைக்குத்தானவையெனக் கொண்டு அவற்றைக் காண்க.

மூட்டு A இல் இருந்து ஆரம்பித்துத் தகைப்பு வரிப்படம் ஒன்றை வரைந்து கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களைக் கண்டு இழுவைகளையும் உதைப்புக்களையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

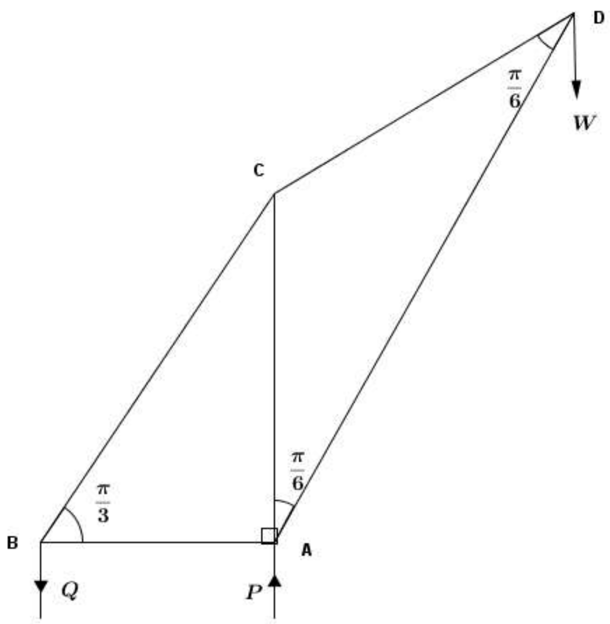
17. உருவில் காட்டியவாறு ஒன்பது இலேசான கோல்களால் ஆன சட்டப்படல் B, C ஒரே கிடை மட்டத்திலுள்ள இரு தாங்கிகளின் மீது ஓய்வில் உள்ளது. A, F, D, E ஆகிய மூட்டுகளில் முறையே 400 W, 100 W, 200 W, 100 W நிறைகள் தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. B, C இல் உள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களைக் கண்டு உதைப்புக்களையும் இழுவைகளையும் வேறுபடுத்துக.



18. உருவில் காட்டியவாறு ஏழு சம நீளமுள்ள இலேசான கோல்களால் ஆன சட்டப்படல் A, C ஒரே கிடை மட்டத்தில் உள்ள இரு தாங்கிகளில் ஓய்வில் உள்ளது. மூட்டு B இல் W நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. A, C இல் உள்ள மறுதாக்கங்களின் பருமன் களைக் காண்க. தகைப்பு வரிப்படம் வரைவதன் மூலம் கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களைக் கண்டு இழுவைகளையும் உதைப்புக்களையும் வேறுபடுத்துக.



19.

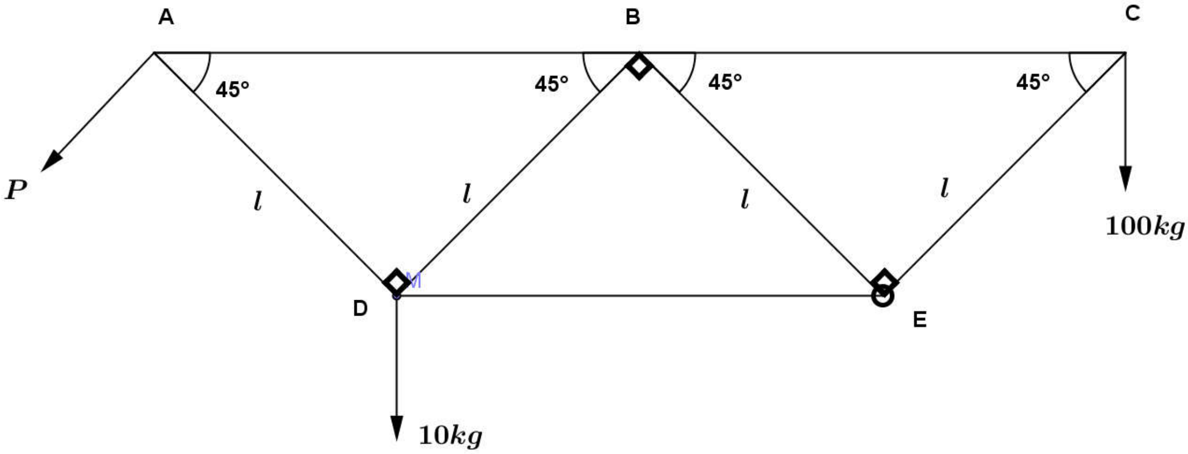


உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஐந்து இலேசான கோல்களால் ஆன சட்டப் படல் A இல் தாங்கப்பட்டும் B இல் ஒரு நிலைக்குத்து விசை Q கொடுக் கப்பட்டும் D இல் W நிறை தொங்க விடப்பட்டு சமநிலையில் உள்ளது. AB கிடையாகவும் AC நிலைக்குத்தாகவும் $B\hat{C}D = B\hat{A}D = \frac{2\pi}{3}$, $A\hat{B}C = \frac{\pi}{3}$ ஆகுமாறு உள்ளது.

i. P, Q இன் பெறுமானங்களை W இல் காண்க.

ii. தகைப்பு வரிப்படம் வரைவதன்மூலம் கோல்களில் உள்ள தகைப்புக் களைக் கண்டு அது இழுவைகளா அல்லது உதைப்பா என வேறு படுத்துக.

20.



ஏழு இலேசான கோல்களால் ஆன சட்டப்படல் உருவில் காட்டியவாறு E இல் பிணைக்கப்பட்டும் C, D இல் முறையே 100 kg, 10 kg நிறைகள் தொங்கிக்கொண்டிருக்க ABC கிடையாக இருக்குமாறு AD இற்கு செங்குத்தான விசை P இன் மூலம் சமநிலையில் உள்ளது.

i. E இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளைக் காண்க.

ii. P இன் பெறுமானம் யாது?

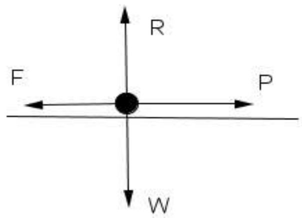
iii. தகைப்பு வரிப்படம் வரைவதன்மூலம் கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.

7.0 உராய்வு

7.1 அறிமுகம்

இரு உடல்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று தொடுகையிலுள்ளபோது தொடுகைப் புள்ளியில் ஒரு உடல் மற்றைய உடலில் வழுக்குதலைத் தடை செய்யும் விசை உராய்வு விசை என அழைக்கப்படும். இரு உடல்களிலும் இவ்வுராய்வு விசை ஒன்றுக்கொன்று சமனாகவும் எதிராகவும் இருக்கும்.

கரடான தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ள உடலில் ஒரு கிடைவிசை P பிரயோகிக்கப்படும் போது அவ்வுடல் இயங்காமைக்கான காரணம் P யிற்கு சமனாகவும் எதிராகவும் தளத்தினால் உடலிற்கு வழங்கப்படும் ஒரு விசையாகும். இவ்விசை உராய்வு விசை எனப்படும். இவ்விசை F எனின், $F = P$ ஆகும்.



P ஆனது படிப்படியாக அதிகரிக்கப்படும்போது, ஒரு நிலையில் உடல் இயங்கஆரம்பிக்கும். இது உராய்வு விசையானது ஒலு எல்லையைவிட அதிகரிக்கமுடியாது என்பதனைக் காட்டுகின்றது. பொருள் இயங்க ஆரம்பிக்கும் நிலையிலுள்ள உராய்வு விசை எல்லை உராய்வு விசை என அழைக்கப்படும்.

எல்லைச் சமநிலையில் உராய்வுக்குணகம் $= \dfrac{\text{எல்லைஉராய்வுவிசை}}{\text{செவ்வன்மறுதாக்கம்}}$

எல்லைச் சமநிலை $\mu = \dfrac{F_L}{R}$

இங்கு F_L என்பது எல்லை உராய்வு விசையாகும்.

சமநிலைக்கு $\dfrac{F_L}{R} \leq \mu$

ஏனெனில் $F \leq F_L$

7.2 உராய்வு விதிகள்

1. இரு உடல்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று தொடுகையிலுள்ளபோது தொடுபுள்ளியில் ஒரு உடலால் மற்றைய உடலில் தாக்கும் உராய்வு விசையின் திசையானது அவ்வுடல் இயங்குவதற்கு எத்தனிக்கும் திசைக்கு எதிராக இருக்கும்.

2. இரண்டு உடல்களும் சமநிலையில் உள்ளபோது உராய்வு விசையின் பருமனானது பொருள் இயங்குவதனை மட்டுமட்டாகத் தடுப்பதற்கு போதுமானதாகும்.

3. எல்லை உராய்வு விசையிற்கும் செவ்வன் மறுதாக்கத்திற்கும் இடையேயான விகிதம் உராய்வுக்குணகம் என அழைக்கப்படும். இது அவ்வுடல் ஆக்கப்பட்ட பதார்த்தத்தில் தங்கியுள்ளது. எல்லை உராய்வு என்பது குறிப்பிட்டளவு பிரயோகிக்கப்படும் உராய்வு ஆகும்.

4. செவ்வன் மறுதாக்கம மாற்றப்பட்டாலொழிய எல்லை உராய்வு விசையானது மேற்பரப்பின் வடிவத்திலோ அல்லது பரப்பிலோ தங்கியிருக்காது.

5. பொருள் இயங்க ஆரம்பிக்கும் போது உராய்வு விசையின் திசையானது பொருள் இயங்கும் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் இருக்கும். இயக்கம் ஆரம்பித்தபின் உள்ள எல்லை உராய்வு விசையானது பொருள் இயங்க ஆரம்பிக்குமுன் உள்ள எல்லை உராய்வுவிசையிலும் சற்று குறைவாக இருக்கும்.

6. எல்லை உராய்வு விசையானது உடலின் வேகத்தில் தங்கியிருப்பதில்லை.

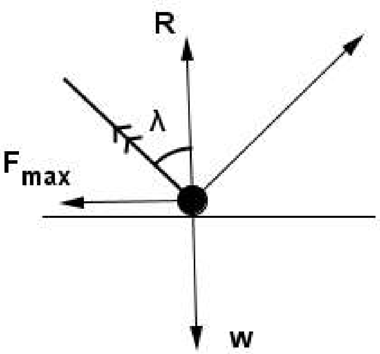
உராய்வுக்கோணம்

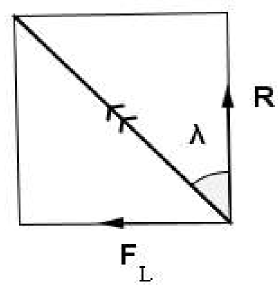
இரு உடல்கள் தொடுகையிலுள்ளபோது தொடுபுள்ளியிலுள்ள விளையுள் மறுதாக்கம் என்பது செவ்வன் மறுதாக்கத்தினதும் உராய்வு விசையினதும் விளையுள் விசையாகும். எல்லைச் சமநிலையில் மொத்த மறுதாக்கமானது செவ்வன் மறுதாக்கத்துடன் அமைக்கும் கோணம் λ என்பது உராய்வுக் கோணமாகும்.

$$\tan\lambda = \frac{F_L}{R}$$

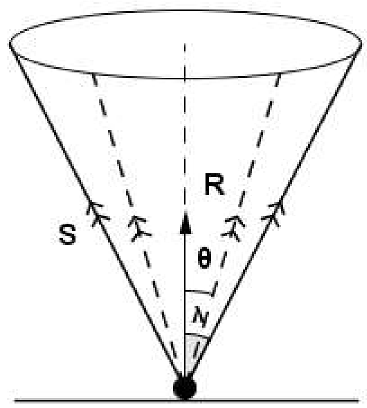
$$\frac{F_L}{R} = \mu$$

$$\tan\lambda = \mu$$





உராய்வுக் கூம்பு



கரடான தளம் ஒன்றுடன் தொடுகையிலுள்ள உடலைக் கருதுக. தொடுகைப்புள்ளியிலுள்ள பொதுச் செவ்வன் அச்சாகவும் அரையுச்சிக்கோணம் λ உம் கொண்ட செவ்வட்ட கூம்பானது உராய்வுக்கூம்பு என அழைக்கப்படும். உடல் எத்திசையில் இயங்க எத்தனிப்பினும் மொத்த விளையுள் மறுதாக்கமானது கூம்பின் மேற்பரப்பில் அல்லது மேற்பரப்பினுள் இருக்கும்.

- **புறவிசையின் தாக்கத்தின் கீழ் கரடான கிடைமேற்பரப்பிலுள்ள ஒரு பொருளின் சமநிலை**

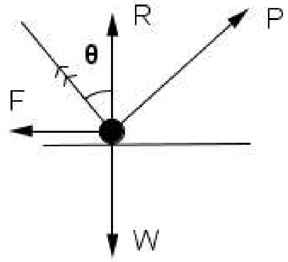
$\frac{F}{R} = \tan\theta$

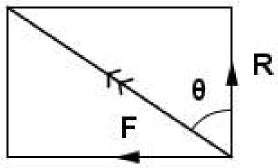
$\frac{F}{R} \le \mu$

$\tan\theta \le \mu$

$\tan\theta \le \tan\lambda$

$\theta \le \lambda$

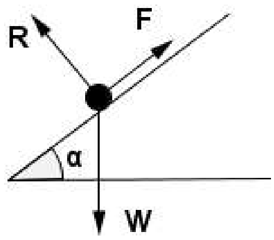




- **கரடான சாய்தளத்தில் ஒரு பொருளின் சமநிலை**

தளத்திற்கு சமாந்தரமாக துணிக்க.

$\nearrow$ $F - W\sin\alpha = 0$; $F = W\sin\alpha$



தளத்திற்கு செங்குத்தாக துணிக்க.

$\nwarrow$ $R - W\cos\alpha = 0$; $R = W\cos\alpha$

சமநிலைக்கு துணிக்க.

$$\frac{F}{R} \le \mu$$

$$\frac{W\sin\alpha}{W\cos\alpha} \le \tan\lambda$$

$$\tan\alpha \le \tan\lambda$$

$$\alpha \le \lambda$$

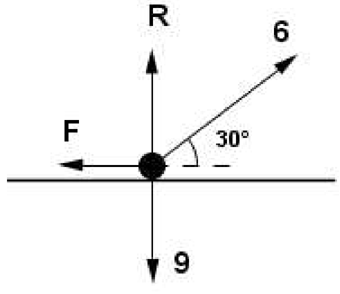
7.3 செய்து காட்டப்பட்ட உதாரணங்கள்

உதாரணம் 1

9 N நிறை கொண்ட ஒரு உடலானது ஒரு கரடான கிடைத்தரையில் வைக்கப்பட்டு கிடையுடன் 30° அமைக்கும் ஒரு இழையினால் இழுக்கப்படுகின்றது. உடல் இயங்க ஆரம்பிக்கும்போது இழையிலுள்ள இழுவை 6 N எனின் உடலிற்கும் தளத்திற்குமிடைப்பட்ட உராய்வுக் குணகத்தைக் கணிக்க.

விசைகளைக் கிடையாகப் பிரிக்க.

$\rightarrow$ $6\cos 30 - F = 0$; $F = 3\sqrt{3}$



விசைகளை நிலைக்குத்தாகப் பிரிக்க.

$\uparrow \quad R + 6 \sin 30° - 9 = 0$

$$R = 6$$

எல்லைச் சமநிலைக்கு,

$$\mu = \frac{F}{R}$$

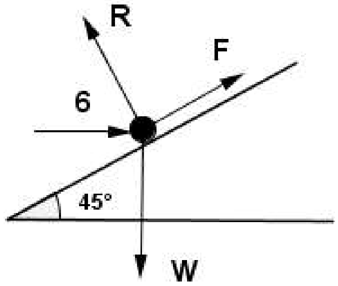
$$= \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

உதாரணம் 2

கிடையுடன் 45° கோணம் அமைக்கும் கரடான தளம் ஒன்றில் ஒரு உடல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. தளத்திற்கும் உடலிற்கும் இடைப்பட்ட உராய்வுக்குணகம் $\frac{1}{3}$ உடல் தளத்தில் கீழ்நோக்கி வழுக்குதலை தடுப்பதற்குத் தேவையான கிடைவிசை 6 N ஆகும்.

(a) உடலின் நிறையைக் காண்க.

(b) விசையானது படிப்படியாக அதிகரிக்கும்போது துணிக ஆரம்பிக்கப்படுகின்றது. பொருள் மேல்நோக்கி இயங்க பெறுமானத்தைக் காண்க.



(a) $\mu = \frac{1}{3}$

சமநிலைக்கு தளம்வழியே மேல்நோக்கி துணிக்கை

$$\nearrow \quad F + 6 \cos 45° - W \sin 45° = 0 \quad ; \quad F = \frac{W - 6}{\sqrt{2}}$$

தளத்திற்குச் செங்குத்தாக துணிக்கை,

$$\nwarrow \quad R - 6 \sin 45° - W \cos 45° = 0 \quad ; \quad R = \frac{W + 6}{\sqrt{2}}$$

எல்லைச் சமநிலைக்கு

$$\frac{F}{R} = \mu \quad ; \quad \frac{\frac{W - 6}{\sqrt{2}}}{\frac{W + 6}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{W - 6}{W + 6} = \frac{1}{3} \quad ; \quad W = 12 \text{ N}$$

(b) தளத்துக்கு சமாந்தரமாக விசைகளைக் கூறாக்குக.

$\swarrow$ $F - P\cos 45° + 12\sin 45° = 0 \quad ; \quad F = \dfrac{P - 12}{\sqrt{2}}$

விசைகளைத் தளத்துக்கு செங்குத்தாக குவிக்க.

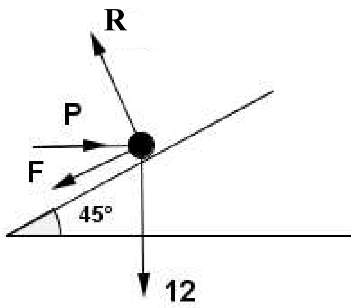
$\nwarrow$ $R - P\sin 45° - 12\cos 45° = 0 \quad ; \quad R = \dfrac{P + 12}{\sqrt{2}}$

எல்லைச் சமநிலையில்,

$$\frac{F}{R} = \mu$$

$$\frac{\frac{P - 12}{\sqrt{2}}}{\frac{P + 12}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{P - 12}{P + 12} = \frac{1}{3} \quad ; \quad P = 24\text{ N}$$



ஒரு கரடான கிடைத்தரையில் வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு துணிக்கையை இயங்கச் செய்யத் தேவையான மிகக்குறைந்த விசை

துணிக்கையின் நிறை W எனவும்,

உராய்வுக் கோணம் λ எனவும் கொள்க.

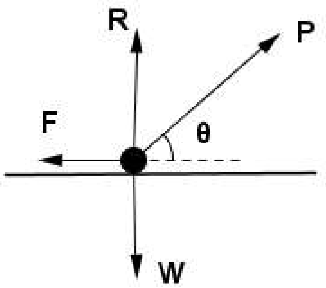
துணிக்கையில் தாக்கும் விசைகள்

(a) நிறை W

(b) செவ்வன் மறுதாக்கம R

(c) உராய்வு விசை F

(d) கிடையுடன் θ கோணம் அமைக்கும் தேவையான விசை P



துணிக்கையின் சமநிலைக்கு கிடையாகத் துணிக்க.

$\rightarrow \quad P\cos\theta - F = 0 \quad ; \quad F = P\cos\theta$

துணிக்கையின் சமநிலைக்கு நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க.

$\uparrow \quad R + P\sin\theta - W = 0 \quad ; \quad R = W - P\sin\theta$

எல்லைச் சமநிலைக்கு

$$\frac{F}{R} = \mu = \tan\lambda$$

$$\frac{P\cos\theta}{W - P\sin\theta} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$P(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda) = W\sin\lambda$$

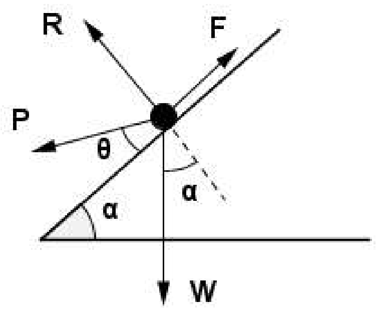
$$P\cos(\theta-\lambda) = W\sin\lambda$$

$$P = \frac{W\sin\lambda}{\cos(\theta-\lambda)}$$

P இழிவாக இருப்பதற்கு $\cos(\theta - \lambda) = 1$ அல்லது $\theta = \lambda$

அதாவது $\theta = \lambda$, $P_{\text{இழிவு}} = W\sin\lambda$

- **உராய்வுக்கோணத்திலும் குறைந்த சாய்வுள்ள கரடான தளத்தில் பொருள் வைக்கப்படும்போது அதனை கீழ் நோக்கி இயங்கச் செய்யவல்ல மிகக்குறைந்த விசை**



தளத்தின் கிடையுடனான சாய்வு α என்க.

$\alpha < \lambda$ ஆக இருப்பதனால்,

துணிக்கை சமநிலையில் இருக்கும்.

பிரயோகிக்கப்படும் விசை P தளத்துடன் θ கோணம் அமைக்கின்றது என்க.

துணிக்கையின் சமநிலைக்கு
தளத்திற்குச் சமாந்தரமான திசையில் விசைகளைத் துணிக்க.

$\swarrow$ $P\cos\theta + W\sin\alpha - F = 0$

$F = P\cos\theta + W\sin\alpha$

தளத்திற்குச் செங்குத்தாக விசைகளைத் துணிக்க.

$\nwarrow$ $R - W\cos\alpha + P\sin\theta = 0$

$R = W\cos\alpha - P\sin\theta$

எல்லைச் சமநிலைக்கு

$$\frac{F}{R} = \mu = \tan\lambda$$

$$\frac{P\cos\theta - W\sin\alpha}{W\cos\alpha - P\sin\theta} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$P(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda) = W(\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda)$$

$$P\cos(\theta-\lambda) = W\sin(\alpha+\lambda)$$

$$P = \frac{W\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)}$$

P இழிவாக இருப்பதற்கு $\cos(\theta-\lambda) = 1$;

அதாவது $\theta = \lambda$ உம் $P_{இழிவு} = W\sin(\alpha+\lambda)$ ஆக இருக்கும்.

- **தளத்தின் சாய்வு உராய்வுக் கோணத்திலும் அதிகமாக இருக்கும்போது துணிக்கையை மேல்நோக்கி இயக்கவல்ல அதிகுறைந்த விசை**

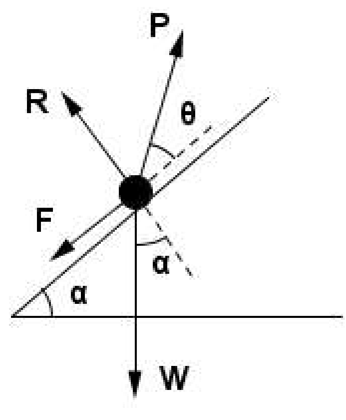
$\alpha > \lambda$ ஆயிருப்பதனால் துணிக்கை கீழ்நோக்கி வழுக்கும்.

துணிக்கையின் சமநிலைக்கு தளத்திற்குச் சமாந்தர திசையில் விசைகளைத் துணிக்க.

$$\nearrow \; P\cos\theta - F - W\sin\alpha = 0$$
$$F = P\cos\theta - W\sin\alpha$$

தளத்திற்குச் செங்குத்தாக விசைகளைத் துணிக்க.

$$\nwarrow \; R + P\sin\theta - W\cos\alpha = 0$$
$$R = W\cos\alpha - P\sin\theta$$



எல்லைச் சமநிலைக்கு

$$\frac{F}{R} = \mu = \tan\lambda$$

$$\frac{P\cos\theta - W\sin\alpha}{W\cos\alpha - P\sin\theta} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$P(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda) = W(\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda)$$

$$P\cos(\theta-\lambda) = W\sin(\alpha+\lambda)$$

$$P = \frac{W\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)}$$

P இழிவான இருப்பதற்கு $\cos(\theta-\lambda) = 1$;

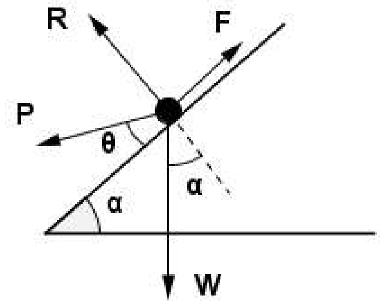
அதாவது $\theta = \lambda$ உம் $P_{இழிவு} = W\sin(\alpha+\lambda)$ ஆகும்.

- **தளத்தின் சாய்வு உராய்வுக் கோணத்திலும் பெரிதாக இருக்கும்போது பொருளை கீழ்நோக்கி வழுக்கவிடாது தாங்கும் மிகக்குறைந்த விசை**

கிடையுடன் தளத்தின் சாய்வு α என்க.

j s j j pd ; r ha ;T α என்க. $\alpha < \lambda$ என்பதால், துணிக்கை சமநிலையிலிருக்கும்.

பிரயோகிக்கும் விசை P எனவும், இது தளத்துடன் θ கோணத்தை அமைக்கின்றது எனவும் கொண்டால்,



துணிக்கையின் சமநிலைக்கு

விசைகளை தளத்தின் வழியே துணிக்க,

$$\swarrow \quad P\cos\theta + W\sin\alpha - F = 0$$

தளத்திற்குச் செங்குத்தாக விசைகளைத் துணிக்க.

$$\nwarrow \quad R - W\cos\alpha + P\sin\theta = 0$$

எல்லைச் சமநிலைக்கு,

$$\frac{F}{R} = \mu = \tan\lambda$$

$$\frac{P\cos\theta + W\sin\alpha}{W\cos\alpha - P\sin\theta} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$P(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda) = W(\sin\lambda\cos\alpha - \cos\lambda\sin\alpha)$$

$$P\cos(\theta-\lambda) = W\sin(\lambda-\alpha)$$

$$P = \frac{W\sin(\lambda-\alpha)}{\cos(\theta-\lambda)}$$

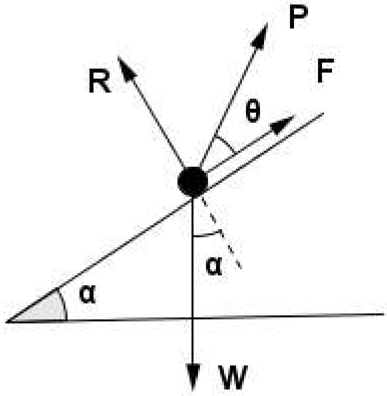
P இழிவான இருப்பதற்கு $\cos(\theta + \lambda) = 1$

$\theta = -\lambda$ இன் போது P இன் இழிவுப் பெறுமதி

$P_{\text{இழிவு}} = W\sin(\alpha - \lambda)$ ஆகும்.

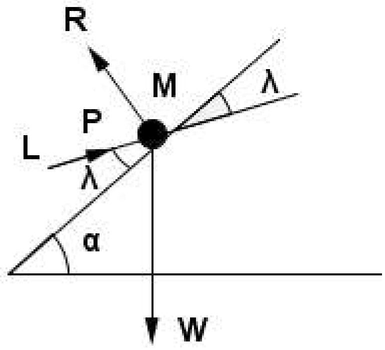
- **தளத்தின் சாய்வு உராய்வுக் கோணத்திலும் பெரிதாக இருக்கும்போது பொருளை கீழ்நோக்கி வழுக்கவிடாது தாங்கும் மிகக்குறைந்த விசை**

கிடையுடன் தளத்தின் சாய்வு α என்க.



$\alpha > \lambda$ ஆதலால் துணிக்கை தளத்தின் வழியே கீழ்நோக்கி வழுக்கும். எனவே உராய்வு விசை மேல்நோக்கி இருக்கும். பொருளைத் தடுப்பதற்கு மேல்நோக்கி இருக்கும். பொருளைத் தடுப்பதற்கு மேல்நோக்கிய விசை பயன்படுத்தல் வேண்டும்.

துணிக்கையின் சமநிலைக்கு,



விசைகளை தளத்தின் வழியே துணிக்க,

$\nearrow F + P\cos\theta - W\sin\alpha = 0$

தளத்திற்குச் செங்குத்தாக விசைகளைத் துணிக்க

$\nwarrow R + P\sin\theta - W\cos\alpha = 0$

எல்லைச் சமநிலைக்கு,

$$\frac{F}{R} = m = \tan\lambda$$

$$\frac{W\sin\alpha - P\cos\theta}{P\cos\alpha - W\sin\theta} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$W(\sin\alpha\cos\lambda - \cos\alpha\sin\lambda) = P(\cos\theta\cos\lambda - \sin\theta\sin\lambda)$$

$$P\cos(\theta+\lambda) = W\sin(\alpha-\lambda)$$

$$P = \frac{W\sin(\alpha-\lambda)}{\cos(\theta+\lambda)}$$

P இழிவாக இருக்க $\cos(\theta+\lambda) = 1$ ஆதல் வேண்டும்.

$\theta = -\lambda$ ஆவதுடன் இல் இழிவுப்பெறுமானம் $P = W\sin(\alpha-\lambda)$ ஆகும்

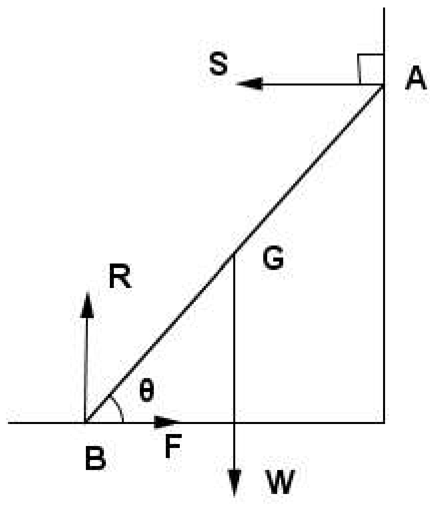
$\theta = -\lambda$ என்பதுன் மூலம் P ஆனது LM வழியே தாக்குவதாகவும்,

யில் இழிவுப் பெறுமானம் $W\sin(\alpha-\lambda)$ எனவும் கருதப்படும்.

கரடான தளங்களில் பொருட்களின் சமநிலை

உதாரணம் 3

2a நீளமும் W நிறையும் கொண்ட ஒரு சீரான கோலானது ஒரு முனை அழுத்தமான சுவருக் கெதிரேயும் மறுமுனை கரடான கிடைத்தளத்திலும் இருக்கத்தக்கவாறு ஓய்கின்றது. தளத்தின் உராய்வுக்குணகம் μ ஆகும். கோலானது வழுக்கும் நிலையில் இருப்பின் கிடையுடன் கோலின் சாய்வு $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\cot\lambda)$ எனக்காட்டி, சுவரிலுள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க. இங்கு λ என்பது உராய்வுக் கோணமாகும்.



முறை 1

கோலின் சமநிலைக்கு,

விசைகளை கிடையாகத் துணிக்க

$\rightarrow$ F - S = 0 ; F = S ------- ①

நிலைக்குத் திசையில் விசையை துணிக்க

$\uparrow$ R - W = 0 ; R = W -------- ②

B பற்றி திருப்பம் எடுப்பின், B = 0,

$$S.2a\,\sin\theta - Wa\cos\theta = 0$$

$$S = \frac{W}{2}\cot\theta \quad \text{---------} ③$$

$$①,③,\ F = S = \frac{W}{2}\cot\theta$$

எல்லைச் சமநிலைக்கு, $\frac{F}{R} = \mu$

$$\frac{W\cot\theta}{2}\times\frac{1}{W} = \tan\lambda$$

$$\cot\theta = 2\tan\lambda$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2}\cot\lambda$$

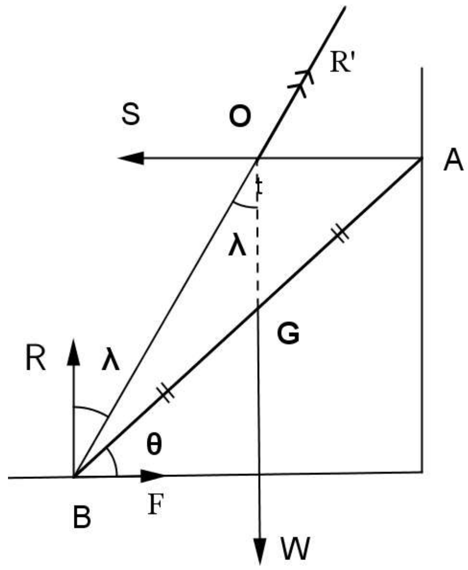
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\cot\lambda\right)$$

$$S = \frac{W}{2}.2\tan\lambda$$

$$= W\tan\lambda$$

முறை 2

A யிலுள்ள மறுதாக்கம் S உம் நிறை W உம் O இல் சந்திக்கின்றன. AB இன் சமநிலைக்கு I, R என்பவற்றின் விளையுள் R' உம் O இனூடு செல்லல் வேண்டும். கோல் எல்லைச் சமநிலையில் உள்ளதால் R, R' என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் λ ஆகும். (λ உராய்வுக்கோணம்)



ΔAOB இற்கு cot விதியைப் பயன்படுத்தினால்

$$(BG+GA)\ \cot(90°-\theta) = BG\ \cot\lambda - GA\ \cot 90°$$

$$(a+a)\ \tan\theta = a\ \cot\lambda$$

$$2\ \tan\theta = \cot\lambda$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2}\cot\lambda$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\cot\lambda\right)$$

சுவரில் மறுதாக்கம் $S = F = \frac{W}{2}\cot\theta \quad (\cdots\cdots③)$

$$= W\ \tan\lambda$$

தரையில் மறுதாக்கம் $= \sqrt{F^2+R^2}$

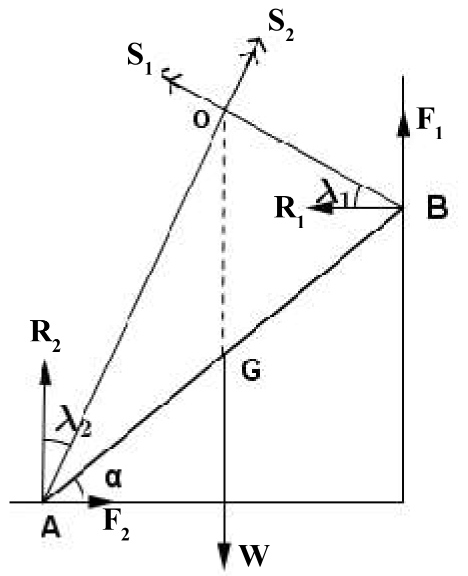
$$= \sqrt{(W\ \tan\lambda)^2 + W^2}$$

$$= \sqrt{W^2\left(1+\tan^2\lambda\right)}$$

$$= W\sec\lambda$$

உதாரணம் 4

ஒரு சீரான கோலானது தன் ஒரு முனை கரடான நிலத்திலும் மறுமுனை கரடான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கெதிரே இருக்குமாறும் தங்கியுள்ளது. கோல் உள்ள தளம் சுவருக்கு செங்குத்தானது ஆகும். சுவர், தரை என்பவற்றின் உராய்வுக் குணகங்கள் முறையே μ_1, μ_2 ஆகும். கோலானது தன் இரு முனைகளிலும் வழுக்கும் தறுவாயில் இருப்பின் கோல்கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் $\tan^{-1}\left[\dfrac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_2}\right]$ எனக் காட்டுக.



(i) F_1, R_1 என்பவற்றின் விளையுள் S_1 ஆகும்.

(ii) F_2, R_2 என்பவற்றின் விளையுள் S_2 ஆகும்.

(iii) கோலின் நிறை W

கோலின் சமநிலைக்கு மூன்று விசைகள் S_1, S_2, W என்பன ஒரு புள்ளி O இனூடு செல்கின்றன.

$\mu_1 = \tan\lambda_1, \qquad \mu_2 = \tan\lambda_2$

$R_{1,} S_1$ என்பவற்றிற்கிடைப்பட்ட கோணம் λ_1

R_2, S_2 என்பவற்றிற்கிடைப்பட்ட கோணம் λ_2

ΔAOB இற்கு cot விதியைப் பயன்படுத்தினால்

$$\left(AG + GB\right) \cot (90° - \alpha) = AG \cot \lambda_2 - GB \cot (90° - \lambda_1)$$

$$(1+1) \tan \alpha = \frac{1}{\tan \lambda_2} - \tan \lambda_1$$

$$2 \tan \alpha = \frac{1 - \tan \lambda_1 \tan \lambda_2}{\tan \lambda_2}$$

$$\tan \alpha = \frac{1 - \tan \lambda_1 \tan \lambda_2}{2 \tan \lambda_2}$$

$$\tan \alpha = \left(\frac{1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_2}\right)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_2}\right)$$

உதாரணம் 5

நீளம் 2a ஐயும் நிறை W ஐயும் கொண்ட சீரான கோல் AB ஆனது அதன் முனை A ஒரு கரடான நிலைக்குத்துச் சவருடன் தொடுகையிலுள்ளவாறும் மறுமுனை B யிற்கு இணைக்கப்பட்ட கோலின் நீளத்திற்கு சமனான நீளா இழையொன்றினால் தாங்கப்பட்டும் சமநிலையில் உள்ளது. இழையின் மறுமுனை A யிற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே சுவரிலுள்ள புள்ளி C யிற்கு தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் மேல் முகநிலைக்குத்துடன் θ கோணம் சாய்ந்து சுவருக்குச் செங்குத்தான நிலைக்குத்துக் தளத்தில் சமநிலையிலுள்ளது.

இழையிலுள்ள இழுவையைக் கண்டு சமநிலைக்கு $\theta \geq \cot^{-1}\left(\frac{\mu}{3}\right)$ எனக் காட்டுக. இங்கு μ என்பது உராய்வுக் குணகம்.

B இலுள்ள இழுவை கோலின் நிறை W என்பன புள்ளி O இல் சந்திக்கின்றன. எனவே சமநிலைக்கு A யிலுள்ள விசைகள் F, R என்பவற்றின் விளையுள் R' உம் O இனூடு செல்லும்.

$C\hat{A}B = \theta$, since BA = BC, $B\hat{A}C = B\hat{C}A = \theta$

$\therefore \; A\hat{B}C = 180 - 2\theta$

AB இன் சமநிலைக்கு,

$$A\circlearrowleft \;= 0$$

$$T.\, AB \sin (180° - 2\theta) - W.AG \sin \theta = 0$$

$$T.2a \sin 2\theta = W.a \sin \theta$$

$$T = \frac{W}{4 \cos \theta}$$

$$= \frac{W \sec \theta}{4}$$

AB இன் சமநிலைக்கு,

விசைகளைக் கிடையாகத் துணிக்க.

$$\rightarrow R - T\cos(90^\circ - \theta) = 0$$

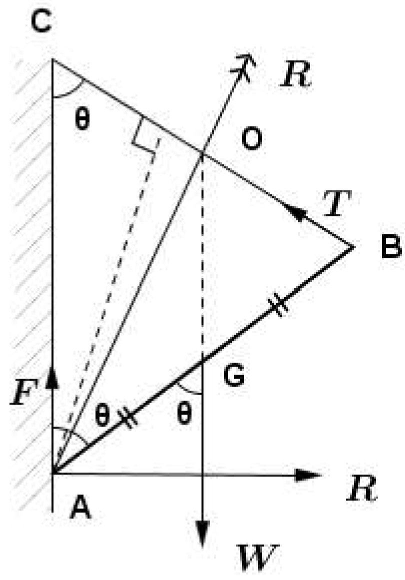
$$R = T\sin\theta = \frac{W\tan\theta}{4}$$

விசைகளை நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க.

$$\uparrow \quad T\cos\theta + F - W = 0$$

$$F = W - T\cos\theta$$

$$= W - \frac{W}{4} = \frac{3W}{4}$$



சமநிலைக்கு,

$$\frac{F}{R} \le \mu$$

$$\frac{3W}{4} \times \frac{4}{W\tan\theta} \le \mu$$

$$3\cot\theta \le \mu$$

$$\cot\theta \le \frac{\mu}{3}$$

$$\theta \ge \cot^{-1}\left(\frac{\mu}{3}\right)$$

உதாரணம் 6

ஒரு ஏணியொன்றின் அடி கரடான கிடைத்தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் தங்கியிருக்கத்தக்க வாறும் r ஆரையுள்ளதும் அதே கரடான கிடைத்தளத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளதுமான அச்சு கிடையாக உள்ள ஒரு குழாயில் சாய்ந்தும் ஏணி சமநிலையில் உள்ளது. ஏணியின் மறுமுனை குழாயிற்கு அப்பால் நீண்டு காணப்படுகின்றது. ஏணியின் புவியீர்ப்பு மையம் ஏணியின் அடியிலிருந்து b தூரத்தில் உள்ளது. ஏணியின் இரு தொடுகைப்புள்ளிகளிலுமுள்ள உராய்வுக் கோணம் λ ஆகவும் கிடையுடன் ஏணி ஆக்கும் கோணம் 2α ஆகும். $(b < 2r\cot\alpha)$ ஏணியின் அடியிலிருந்து x தூரத்திலுள்ள புள்ளியிலிருந்து ஏணியின் நிறைக்குச் சமனான நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. ஏணியின் இரண்டு தொடுகைப் புள்ளிகளும் எல்லைச் சமநிலையிலுள்ளவாறு ஏணியானது குழாயின் அச்சுக்குச் செங்குத்தான நிலைக்குத்து தளத்தில் உள்ளது.

தீர்வு

விசைகள் F_1, R_1 என்பவற்றின் விளையுள் S_1 யிலுள்ள விசைகள் F_1, R_2 என்பவற்றின் விளையுள் S_2 (A யிலுள்ளது)

மொத்தநிறை 2W (G இல்) என்பன புள்ளி O இனூடு செல்கின்றன.

(i) R_1, S_1 இற்கிடைப்பட்ட கோணம் λ

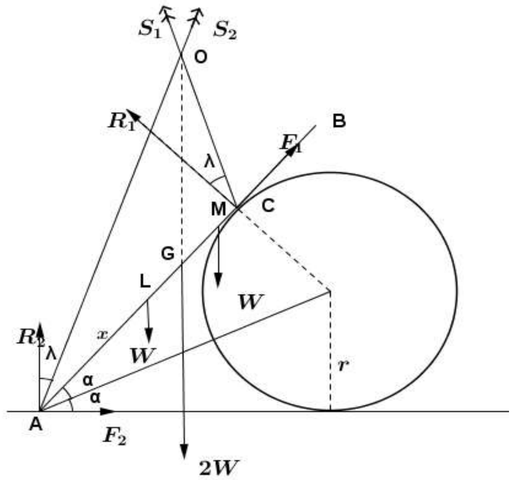
(ii) R_2, S_2 இற்கிடைப்பட்ட கோணம் λ

$\mathrm{AM} = b, \qquad \mathrm{AC} = r\cot\alpha$

$\mathrm{AL} = x \ \mathrm{AM} = b$,

ஆகவே $\mathrm{AG} = \mathrm{AL} + \mathrm{LG} = x + \dfrac{b-x}{2} = \dfrac{b+x}{2}$

இப்போது $\mathrm{AG} = \dfrac{b+x}{2}$, $\mathrm{GC} = r\cot\alpha - \left(\dfrac{b+x}{2}\right)$



முக்கோணம் ACO இற்கு Cot விதியை உபயோகிக்க.

$$(\mathrm{AG}+\mathrm{GC})\cot(90^\circ - 2\alpha) = \mathrm{GC}\cot\left[90^\circ - (\lambda + 2\alpha)\right] - \mathrm{AG}\cot(90^\circ + \lambda)$$

$$\mathrm{AC}\tan 2\alpha = \mathrm{GC}\tan(\lambda + 2\alpha) + \mathrm{AG}\tan\lambda$$

$$r\cot\alpha.\tan 2\alpha = \left[r\cot\alpha - \left(\frac{b+x}{2}\right)\right]\tan(\lambda+2\alpha) + \left(\frac{b+x}{2}\right)\tan\lambda$$

$$r\cot\alpha\left[\tan 2\alpha - \tan(\lambda+2\alpha)\right] = \left(\frac{b+x}{2}\right)\left[\tan\lambda - \tan(\lambda+2\alpha)\right]$$

$$r\cot\alpha\left[\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - \frac{\sin(\lambda+2\alpha)}{\cos(\lambda+2\alpha)}\right] = \left(\frac{b+x}{2}\right)\left[\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda} - \frac{\sin(\lambda+2\alpha)}{\cos(\lambda+2\alpha)}\right]$$

$$r\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left[\frac{\sin\left[2\alpha-(\lambda+2\alpha)\right]}{\cos 2\alpha.\cos(\lambda+2\alpha)}\right] = \left(\frac{b+x}{2}\right)\left[\frac{\sin\left[\lambda-(\lambda+2\alpha)\right]}{\cos\lambda.\cos(\lambda+2\alpha)}\right]$$

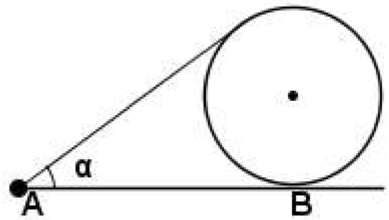
$$r\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\times\frac{\sin(-\lambda)}{\cos 2\alpha} = \left(\frac{b+x}{2}\right)\frac{\sin(-2\alpha)}{\cos\lambda}$$

$$\frac{r\cos\alpha.\sin\lambda}{\sin\alpha.\cos 2\alpha} = \left(\frac{b+x}{2}\right)\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\lambda}$$

$$r\sin\lambda\cos\lambda = (b+x)\sin^2\alpha.\cos 2\alpha$$

உதாரணம் 7

ஒரு கரடான கிடைத்தரையிலுள்ள w நிறையுள்ள துணிக்கை A இற் ஒரு இலேசான நீளா இழையின் ஒரு நுனி இணைக்கப்பட்டு , i o a hd J W நிறையும் a ஆரையும் கொண்ட செவ்வட்ட உருளையின் பிறப்பாக்கியைத் தொட்டவாறு சுற்றப்பட்டுள்ளது.



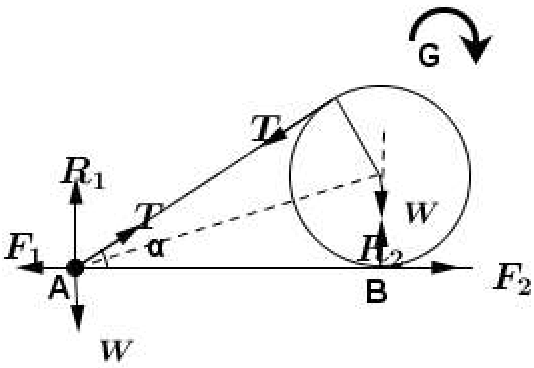
உருளையானது புள்ளி B இல் நிலத்தை தொடுகின்றது. இழையினூடான நிலைக்குத்துத் தளமானது உருளையின் அச்சுக்குக் செங்குத்தாகவும் உருளையின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடே சென்று தளத்தை படத்திற் காட்டியவாறு AB வழியே இடைவெட்டுகின்றது. இழையானது இறுக்கமாயும் AB யுடன் a கோணத்தையும் ஆக்குகின்றது. உருனையானது B பற்றி நகர்வதனைத் தடுப்பதற்கு போதுமான கரடானதாக கிடைத்தரையுள்ளது. துணிக்கை எல்லைச் சமநிலையை அடையுமாறு G திருப்பமுடைய இணையொன்று உருளைக்குப் பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. துணிக்கைக்கும் தளத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ எனின் இழையிலுள்ள இழுவை $T = \dfrac{\mu w}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}$ எனக் காட்டுக. மேலும் B பற்றி திருப்பம் எடுப்பதன் மூலம் G இன் பெறுமதியைக் கணிக்குக.

தீர்வு

தொகுதியின் சமநிலைக்கு

கிடைதிசையில் விசைகளைத் துணிக்க.

$$\rightarrow\ F_2 - F_1 = 0$$
$$F_2 = F_1$$



நிலைக்குத்துத் திசையில் விசையை துணிக்க.

$$\uparrow\quad R_1 + R_2 - W - w = 0$$
$$R_1 + R_2 = W + w$$

துணிக்கையின் சமநிலைக்கு

கிடைதிசையில் விசைகளைத் துணிக்க.

$$\rightarrow T\cos\alpha - F_1 = 0 \quad ; \quad F_1 = T\cos\alpha$$

நிலைக்குத் திசையில் விசையை துணிக்க

$$\uparrow\quad R_1 + T\sin\alpha - w = 0\ ;\ R_1 = w - T\sin\alpha$$

எல்லைச் சமநிலையில்

$$\frac{F_1}{R_1} = \mu$$

$$\frac{T\cos\alpha}{w - T\sin\alpha} = \mu \quad ; \quad T(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = \mu w$$

$$T = \frac{\mu w}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

உருளையின் சமநிலைக்கு B பற்றி திருப்பம் எடுத்தல்

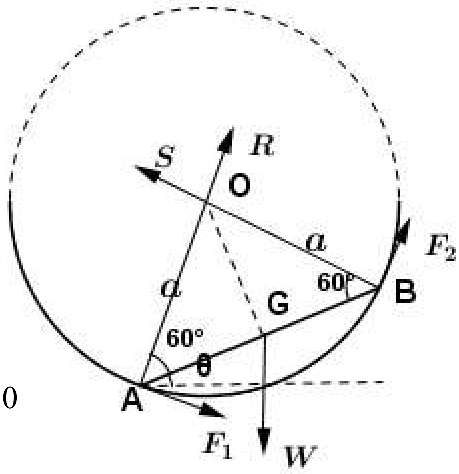
$$\text{B)} \quad T(a + a\cos\alpha) - G = 0$$

$$G = T.\,a\,(1 + \cos\alpha)$$

$$= \frac{\mu w a\,(1 + \cos\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

உதாரணம் 8

நிலைப்படுத்தப்பட்ட a ஆரையுடைய கோள வடிவமான ஒரு கிண்ணத்தினுள்ளே a நீளமும் W நிறையும் கொண்ட ஒரு சீரான கோல் ஓய்வில் உள்ளது. கோலிற்கும் கிண்ணத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ ஆயும் $\mu\left(< \sqrt{3}\right)$ கோல் கிடையுடன் θ கோணத்தை அமைத்து எல்லைச் சமநிலையிலும்இருப்பின்; கோலின் கீழ்முனையிலுள்ள மறுதாக்கம் $\frac{W\cos\theta}{\sqrt{3} - \mu}$ எனக் காட்டுக. மேலும் மேல் முனையிலுள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க. இதிலிருந்து $\tan\theta = \frac{4\mu}{3 - \mu^2}$ எனவும் நிறுவுக.



கோலானது எல்லைச் சமநிலையில் இருப்பதனால்

$$F_1 = \mu R \;, \quad F_2 = \mu S$$

AB இன் சமநிலைக்கு B பற்றி திருப்புதிறன் எடுக்க.

$$\text{B)} \; -R.\,a\sin 60° + \mu R\,.\,a\sin 30° + w.\frac{a}{2}\cos\theta = 0$$

$$-R\frac{\sqrt{3}}{2} + \mu R.\frac{1}{2} + w.\frac{1}{2}\cos\theta = 0$$

$$R\left(\sqrt{3} - \mu\right) = w\cos\theta \quad ; \quad R = \frac{w\cos\theta}{\sqrt{3} - \mu} \text{---------(1)}$$

A பற்றி திருப்புதிறன் எடுக்க.

$$A\circlearrowleft \quad S.a\sin 60° + \mu S.a\sin 30° - w.\frac{a}{2}\cos\theta = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}S}{2} + \frac{\mu S}{2} = \frac{w\cos\theta}{2}$$

$$S = \frac{w\cos\theta}{\left(\sqrt{3}+\mu\right)} \quad \text{---------------(2)}$$

O பற்றி திருப்புதிறன் எடுக்க.

$$O\circlearrowleft \quad F_1.a + F_2.a - w\left(\frac{a}{2}\cos\theta - a\cos(60+\theta)\right) = 0$$

$$\mu(R+S) = w\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$$

$$\mu\left[\frac{w\cos\theta}{\sqrt{3}-\mu} + \frac{w\cos\theta}{\sqrt{3}+\mu}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}w\sin\theta$$

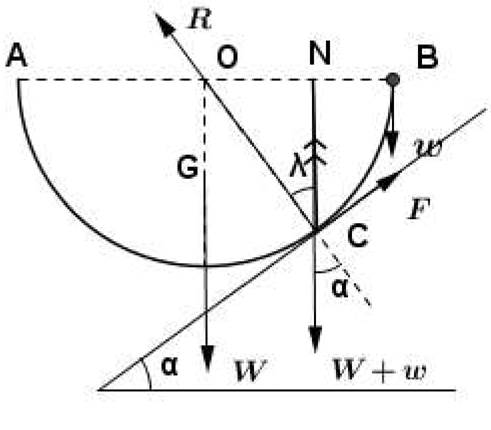
$$\frac{\mu\cos\theta\times 2\sqrt{3}}{3-\mu^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}w\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{4\mu}{3-\mu^2}$$

உதாரணம் 9

W நிறையுள்ள ஒரு சீரான திண்ம அரைக்கோளம் அதன் வளைபரப்பு கிடையுடன் α சாய்வுள்ள தளத்தைத் தொடுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் தளமேற்பரப்பின் விளிம்பிலுள்ள புள்ளியில் ஒரு சிறுதுணிக்கை W இணைக்கப்பட்டு தளமுகம் கிடையாகப் பேணப்பட்டு கோளம் எல்லைச் சமநிலையிலுள்ளது. μ உராய்வுக்குணகம் எனின்.

$\mu = \frac{W}{\sqrt{W(W+2w)}} = \tan\alpha$ எனக்காட்டுக.



$OG = \frac{3a}{8}$ (புவியீர்ப்பு மையம்)

C இல் F, R என்பன தாக்குகின்றன.

எனவே சமநிலைக்கு W, w என்பவற்றின் விளையுளும் C இனூடு செல்லும்.

$$W.\mathrm{ON} - w.\,\mathrm{BN} = 0$$

$$W.\mathrm{ON} = w\,(a - \mathrm{ON})$$

$$(W - w).\,\mathrm{ON} = w.a$$

$$\mathrm{ON} = \frac{w.a}{W + w}$$

சமநிலைக்கு F, R என்பவற்றின் விளையுள் W + w இற்குச் சமனாகவும் எதிராகவும் இருத்தல்வேண்டும்.

எல்லைச் சமநிலையில் $\mathrm{O\hat{C}N} = \lambda$

$$\tan\lambda = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{CN}} = \frac{\mathrm{ON}}{\sqrt{a^2 - \mathrm{ON}^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{w.a}{W+w}}{\sqrt{a^2 - \dfrac{w^2a^2}{(W+w)^2}}}$$

$$= \frac{w}{\sqrt{W^2 + 2Ww}}$$

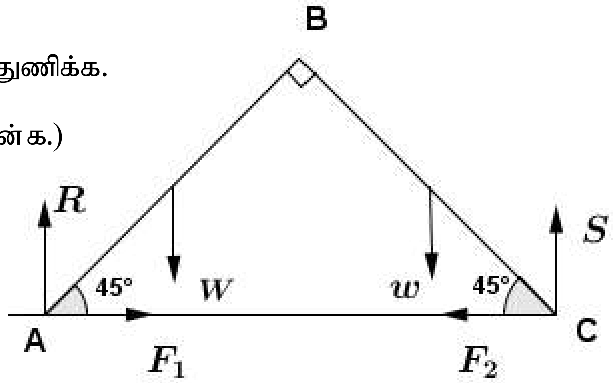
$$\mu = \frac{w}{\sqrt{W(W+2w)}}$$

$$= \tan\alpha \quad (\text{since } \lambda = \alpha)$$

உதாரணம் 10

சமநீளமும் முறையே W, w நிறையும் கொண்ட இரு சீரான கோல்கள் AB, BC என்பன B இல் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. (W > w) முனைகள் A, C என்பன ஒரு கரடான கிடைத்தரையில் தங்க $\mathrm{A\hat{B}C} = \frac{\pi}{2}$ ஆகுமாறு இக்கோல்கள் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் r k e p ; y a p y ; c s s ; s d . μ என்பது கோல்களுக்கும் தரைக்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக்குணகம் எனின் சமநிலையைப் பேணுவதற்கு m இன் இழிவுப்பெறுமானம் $\frac{\mathrm{W+w}}{\mathrm{W+3w}}$ எனக் காட்டுக. $\mu = \frac{\mathrm{W+w}}{\mathrm{W+3w}}$ எனின் முதலில் A இல் வழுக்காது C இல் வழுக்கும் எனக்காட்டுக.

தீர்வு



சமநிலைக்கு விசைகளை கிடையாகத் துணிக்க.

$\rightarrow \quad F_1 - F_2 = 0 \quad ; \quad F_1 = F_2$ (= F என்க.)

நிலைக்குத்துதாகப் பிரிக்க.

$\uparrow \quad R + S - W - w = 0$

$R + S = W + w$

A பற்றி திருப்பங்களைக் கருதுக.

$\overset{\curvearrowright}{A} \quad S.\,4a\cos 45° - w.\,3a\cos 45° - Wa\cos 45° = 0$

$S = \dfrac{W+3w}{4}$ and $R = \dfrac{3W+w}{4}$

AB இன் சமநிலைக்கு மட்டும்

$F_1 . 2a\sin 45° + Wa\cos 45° - R.2a\cos 45° = 0$

$2F_1 + W - 2R = 0$

$F_1 = R - \dfrac{W}{2}$

$= \dfrac{3W+w}{4} - \dfrac{W}{2}$

$= \dfrac{W+w}{4}$

$F_1 = F_2 = F = \dfrac{W+w}{4}$

சமநிலைக்கு

$\dfrac{F_1}{R} \leq \mu \quad , \quad \dfrac{F_2}{S} \leq \mu$

$\dfrac{F_1}{R} = \dfrac{\frac{W+w}{4}}{\frac{3W+w}{4}} = \dfrac{W+w}{3W+w} \leq \mu$

$\dfrac{F_2}{S} = \dfrac{\frac{W+w}{4}}{\frac{W+3w}{4}} = \dfrac{W+w}{W+3w} \leq \mu$

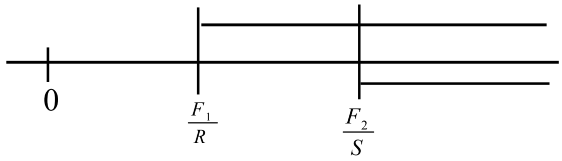
$$R - S = \frac{3W+w}{4} - \frac{W+3w}{4} = \frac{W-w}{2} > 0$$

$R > S$

$$R > S\ (>0) \Rightarrow \frac{1}{R} < \frac{1}{S}$$

$$\Rightarrow \frac{F}{R} < \frac{F}{S}$$

$$\Rightarrow \frac{F_1}{R} < \frac{F_2}{S}$$



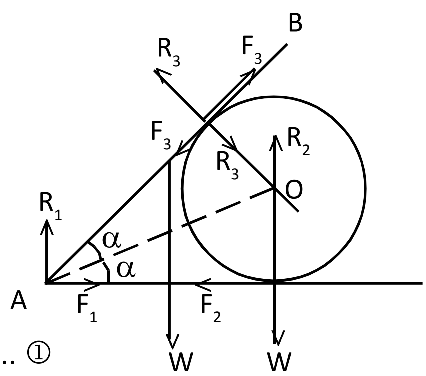
சமநிலை சாத்தியமாவதற்கு $\frac{F_1}{R} \leq \mu$, $\frac{F_2}{S} \leq \mu$

சாத்தியமான இழிவுப்பெறுமானம் $\frac{F_2}{S} = \frac{W+w}{W+3w}$

$\mu = \frac{W+w}{W+3w}$, C இல் முதலில் வழுக்குதல் வேண்டும்.

உதாரணம் 11

W நிறையும், $4l$ நீளமும் உடைய ஓர் சீரான பலகை AB ஆனது, அதன் ஒரு முனை A ஆனது கிடைத்திசையிலும் A யிலுமிருந்து $3l$ தூரத்தில் (பலகை வழியே) உள்ள புள்ளியானது, l ஆரையும் W நிறையுமுடைய சீரான உருளையொன்றின் மேல் தொடுகையிலிருக்க, பலகை உள்ள நிலைக்குத்துத் தளமானது உருளையின் அச்சிற்கு செங்குத்தாக இருக்க, பலகை சமநிலையிலுள்ளது. ஒவ்வொரு தொடுகையிலுமுள்ள உராய்வு விசைகளைக் கண்டு, சமநிலை சாத்தியமாவதற்கு $\mu \geq \frac{8}{21}$ எனக் காட்டுக. இங்கு μ உருளைக்கும் தளத்திற்குமிடையிலான உராய்வுக்குணகம்.



தொகுதியின் சமநிலைக்கு,

கிடையாகத் துணிக்க.

$\rightarrow F_1 - F_2 = 0 \quad ; \quad F_1 = F_2$

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க.

$\uparrow R_1 + R_2 - 2W = 0$

$R_1 + R_2 = 2W$ .... ①

கோளத்தின் சமநிலைக்கு,

$$\circlearrowleft O \quad F_2.a - F_3.a = 0 \;;\; F_2 = F_3$$

எனவே, $F_1 = F_2 = F_3$ .... ②

கோல் AB யில் சமநிலைக்கு,

$$\circlearrowleft A \quad R_3.3\ell - W.2\ell\cos 2\alpha = 0$$

$$R_3 = \frac{2W\cos 2\alpha}{3} = \frac{8W}{15} \text{ .... ③}$$

தொகுதியின் சமநிலைக்கு,

$$\circlearrowleft A \quad R_2.3\ell - W.3\ell - W.2\ell\cos 2\alpha = 0$$

$$3R_2 = 3W + 2W \times \frac{4}{5}$$

$$R_2 = \frac{23W}{15} \text{ ; From ① } R_1 = \frac{7W}{15} \text{ ....④}$$

AB யின் சமநிலைக்கு,

AB வழியே சீராக்க.

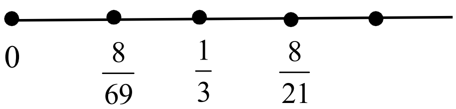
$$\nearrow F_3 + F_1\cos 2\alpha + R_1\sin 2\alpha - W\sin 2\alpha = 0$$

$$F_3 + F_1\cos 2\alpha = \left(W - \frac{7W}{15}\right)\sin 2\alpha$$

$$F_1\left(1+\cos 2\alpha\right) = \frac{8W}{15}\times\frac{3}{5} = \frac{24W}{75} \quad (\text{ஏனென்றால் } F_1 = F_3)$$

$$F_1\left(1+\frac{4}{5}\right) = \frac{24W}{75};\; F_1 = \frac{8W}{45}$$

சமநிலை சாத்தியமாவதற்கு,



$$\frac{F_1}{R_1} \le \mu \;;\quad \frac{F_2}{R_2} \le \mu, \frac{F_3}{R_3} \le \mu$$

$$\frac{8W}{45}\times\frac{15}{7W} \le \mu \;;\; \frac{8W}{45}\times\frac{15}{23W} \le \mu;\; \frac{8W}{45}\times\frac{15}{8W} \le \mu$$

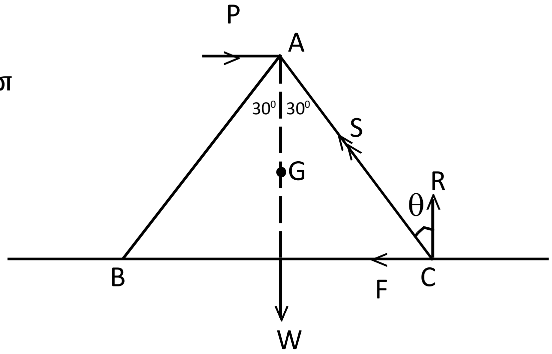
$$\mu \ge \frac{8}{21},\; \mu \ge \frac{8}{69} \;;\; \mu \ge \frac{1}{3}$$

எனவே சமநிலை சாத்தியமாவதற்கு $\mu \ge \frac{8}{21}$ ஆதல் வேண்டும்.

உதாரணம் 12

சமபக்க முக்கோணி ABC வடிவிலான சீரான அடர் ஆனது, BC ஆனது கரடான கிடைத் தரையொன்றில் கிடக்க நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் சமநிலையிலுள்ளது. இதன் உச்சி A யில் படிப்படியாக அதிகரிக்கும் விசையானது முக்கோணியின் தளத்தில் பிரயோகிக்கப் படுகின்றது. அடரானது அடரிற்கும் தளத்திற்கும் இடையிலான உராய்வுக்குணகம் $\frac{\sqrt{3}}{3}$ இலும் சிறிதாக இருப்பின், கவிழமுன் வழுக்கும் எனக் காட்டுக.

முறை I



முக்கோணி ABC இல் தாக்கும் விசைகளாவன

(i) G இல் நிறை W

(ii) A யில் கிடைவிசை P

(iii) A யில் செவ்வன் மறுதாக்கம் R,
உராய்வு விசை F

முக்கோணி கவிழுமாயின் அது C பற்றி கவிழும்.

கவிழும் தறுவாயில் செவ்வன் மறுதாக்கம் C யினூடு தாக்கும்.

G யினூடாக நிறை W, கிடைவிசை A யில் கிடைவிசை P என்பன A யில் சந்திக்கும்.

ஆகவே A யில் R, F இன் விளையுள் S ஆனது A ஊடு செல்லும் (CA வழியே)

R, S இற்கிடையிலான கோணம் θ என்க.

(i) $\lambda < \theta$ ஆயின் கவிழமுன் வழுக்கும்.

(ii) $\lambda > \theta$ ஆயின் வழுக்கமுன் கவிழும்.

$\lambda < \theta$, ஆயின் $\tan\lambda < \tan\theta$

i.e. $\tan\lambda < \tan 30°$

$$\tan\lambda < \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \ \ \mu < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

எனவே $\mu < \frac{\sqrt{3}}{3}$ ஆயின் முக்கோணம் வழுக்கமுன் கவிழும்.

முறை II

முக்கோணி ABC யின் சமநிலைக்கு,

கிடையாகத் துணிக்க.

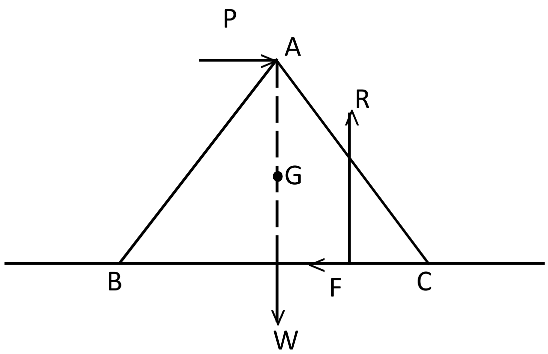
$\rightarrow P - F = 0 \quad ; \; F = P$ .... ①

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க.

$\uparrow R\text{-}W = 0 \quad ; \; R = W$ .... ②

எல்லைச் சமநிலையில்,

$$\frac{F}{R} = \mu \; ; \; \frac{P}{W} = \mu ; \; P = \mu W$$



முக்கோணி ABC யின் சமநிலைக்கு,

$\rightarrow P - F = 0 \quad ; \; F = P$

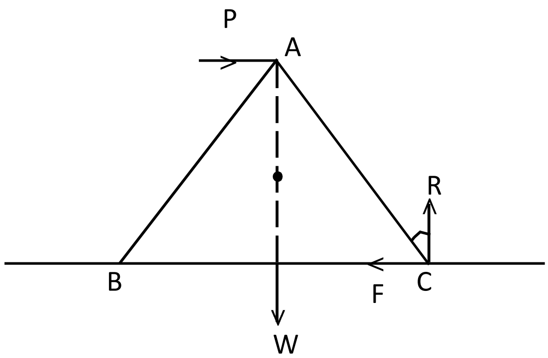
$\uparrow R\text{-}W = 0 \quad ; \; R = W$

வழுக்கும் தறுவாயில் R ஆனது C யில் தொழிற்படும்.

B பற்றி திருப்பம் எடுப்பின்,

$$B) \quad R \times 2a - P\sqrt{3}a - W.a = 0$$

$$P = \frac{W}{\sqrt{3}}$$



$P = \mu W$ ஆக, அடர் வழுக்கும் தறுவாயிலிருக்கும்.

$P = \frac{W}{\sqrt{3}}$ ஆக, அடர் C யில் கவிழும் தறுவாயில் இருக்கும்.

$\mu W < \frac{W}{\sqrt{3}}$ ஆயின் அடரானது கவிழமுன் வழுக்கும்.

அதாவது $\mu < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ஆயின் அடரானது கவிழமுன் வழுக்கும்.

7.4 பயிற்சி

1. கிடையுடன் 30° சாய்விலுள்ள $\frac{3}{4}$ உராய்வுக்குணகம் உடைய கரடான தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ள $80\,\mathrm{kg}$ திணிவினை தளத்தின் வழியே மேல்நோக்கி நகர்த்துவதற்குத் தேவையான மிகக் குறைந்த விசையினைக் கணிக்க.

2. கிடையுடன் α சாய்வுள்ள கரடான தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ள திணிவு ஒன்றினை தளம் வழியே மேல்நோக்கி நகர்த்துவதற்குத் தேவையான மிகக் குறைந்த விசையானது அப்பொருள் அச்சரிவில் கீழ்நோக்கி வழுக்குதலை மட்டுமட்டாகத் தடை செய்யும் விசையின் இருமடங்கு எனின் திணிவிற்கும் தளத்திற்குமிடைப்பட்ட உராய்வுக்குணகம் $\frac{1}{3}\tan\alpha$ எனக் காட்டுக.

3. கரடான சாய்தளம் ஒன்றின் மீது நிறையொன்றினை மேல்நோக்கி நகர்த்தவல்ல மிகக்குறைந்த விசை P ஆகும். அந்நிறையினை தளத்தின்மீது மேனோக்கி நகர்த்தத் தேவையான தளத்திற்கு சமாந்தரமாக மிகக் குறைந்த விசை $P\sqrt{1+\mu^2}$ எனக்காட்டுக. இங்கு μ உராய்வுக்குணகம்.

4. ஒரு கரடான α சாய்வுள்ள சாய்தளத்தின் வழியே தாக்கும் P என்னும் விசையானது ஒரு பொருளை சாய்தளத்தின்மீது வைத்திருக்கப் போதுமானது. உராய்வுக்கோணம் $\lambda < \alpha$ ஆகும் அப்பொருளை தளத்தின் வழியே மேல்நோக்கி இழுப்பதற்குத் தேவையான மிகக் குறைந்த விசை $P\frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\sin(\alpha-\lambda)}$ எனக் காட்டுக.

5. ஒரு சீரான ஏணி ஒரு கரடான கிடைத்தளத்திலும் கரடான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கெதிரேயும் சுவரிற்குச் செங்குத்தான நிலைக்குத்துத் தளம் ஒன்றில் தங்கி ஓய்விலுள்ளது. நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு 30° ஆகும். தரை, சுவர் என்பன சம கரடானதாகவும் ஏணி வழுக்கும் தறுவாயிலும் இருப்பின் உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க.

6. w நிறையுள்ள ஏணியானது ஒரு முனை ஒரு கரடான கிடைத்தரையிலும் மறுமுனை ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கெதிரேயும் தங்கியிருக்க கிடையுடன் α கோணத்தில் சாய்ந்த நிலையில் ஓய்விலுள்ளது. $\frac{w}{W} > \frac{2(1 - \mu\tan\alpha)}{2\mu\tan\alpha - 1}$ எனின் W நிறையுடைய மனிதன் ஒருவன் ஏணியின் உச்சிவரை ஏணி வழுக்காது ஏறமுடியும் எனக் காட்டுக. இங்கு μ என்பது தரைக்கும் ஏணிக்குமிடைப்பட்ட உராய்வுக்குணகம்.

7. $2l$ நீளமுள்ள சீரான நேரிய வளை கரடான கிடைத்தரையிலும் h உயரமுள்ள கரடான நிலைக்குத்தளம் ஒன்றில் எல்லைச் சமநிலையில் உள்ளது. கோலின் ஒரு முனை சுவரிற்கு அப்பால் நீட்டிக் கொண்டும் உள்ளது. இரு தொடுகைகளும் சமகரடானவை எனில் உராய்வுக் கோணம் λ ஆனது $h.\sin 2\lambda = \ell \sin\alpha \cos 2\alpha$ ஆல் தரப்படும் எனக்காட்டுக.

8. ஒரு சீரான ஏணி அதன் முனைகள் கரடான கிடைத்தளத்திலும் சமகரடான நிலைக்குத்துச் சுவரிலும் தங்கியிருக்க ஓய்விலுள்ளது. தொடுகைப்புள்ளி இரண்டிலுமுள்ள உராய்வுக் குணகங்கள் $\frac{1}{3}$ ஆகும். நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ எனின் சமநிலையைக் குழப்பாது கோலின் நிறைக்குச் சமனான ஒரு நிறையை கோலில் அடியிலிருந்து $\frac{9}{10}$ பங்கு தூரத்திற்கு மேலுள்ள புள்ளியிருக்க கட்டித் தொங்கவிடப்படமுடியாது என நிறுவுக.

9. $2a$ நீளமுள்ள பாரமான சீர்க்கோலொன்று தன் ஒரு முனை கரடான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கெதிரே தங்கியிருக்க ஒரு கரடான முளை ஒன்றின் மீது ஓய்கின்றது. முளையிலிருந்து சுவருக்கான கிடைத்தூரம் c ஆகும். கோலின் முனை சுவரைத் தொடும்புள்ளி முளைக்கு மேலே இருப்பின் $\sin^3\theta = \frac{c}{a}\cos^2\lambda$ ஆயுள்ளபோது கோல் கீழ்நோக்கி வழுக்கும் நிலையில் இருக்கும் எனக்காட்டுக.

10. l நீளமுள்ள சீரான ஏணியொன்றின் கீழ்முனை கரடான கிடைத்தரையிலும் மேல் முனையானது a உயரத்திலுள்ஒப்பமானதும் கிடையானதுமான தண்டவாளத்திற்கு சுற்று அப்பால் நீட்டிக்கொண்டு இருக்க ஓய்கின்றது. தரையில் உராய்வுக்கோணம் λ ஆயும் ஏணியானது வழுக்கும் தறுவாயிலும் இருப்பின் $\tan\lambda = \frac{a\sqrt{\ell^2 - a^2}}{\ell^2 + a^2}$ எனக் காட்டுக.

11. சீரான கோல் ஒன்றின் ஒரு முனை கரடான கிடைத்தரையிலும் மறுமுனை சமகரடானதும் கிடையுடன் α சாய்வுள்ளதுமான தளத்திலும் உள்ளவாறு எல்லைச் சமநிலையில் உள்ளது. கோலானது சுவரிற்கு செங்குத்தான நிலைக்குத்து தளத்திலும் உள்ளது. கோல் கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம் θ எனின் $\tan^{-1}\left[\frac{\sin(\alpha - 2\lambda)}{2\sin\lambda \sin(\alpha - \lambda)}\right]$ எனக் காட்டுக.

12. ஒரு சீரான கோல் ஒன்று நிலைக்குத்தான கரடான வட்டவடிவான வளையத்தின் மையத்தில் 60° கோணத்தை எதிரமைப்பதுடன் உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ஆயும் உள்ளது. எல்லைச் சமசிலையில் கிடையுடன் கோலின் சாய்வு $\sin^{-1}\sqrt{\frac{3}{7}}$ எனக்காட்டுக.

13. ஒவ்வொன்று W நிறைகொண்ட இரு சமச்சீர்க்கோல்களை AC, CB என்பன C சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டு முனைகள் A, B என்பன ஒரு சூடான கிடைத்தளத்துடன் தொடுகையிலுள்ளவாறு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் எல்லைச் சமநிலையில் உள்ளது. உராய்வுக்குணகம் μ எனின் $\sin A\hat{C}B = \frac{4\mu}{1+\mu^2}$ எனக் காட்டுக.

14. ஒரு சமபக்க முக்கோணி ஒரு உச்சி கரடான கிடைத்தரையிலும் மற்றைய உச்சிகளிலொன்று ஒப்பமான நிலைக்குத்து சுவருக்கெதிரே இருக்கக்கூடியவாறும் சுவரிற்குச் செங்குத்தான நிலைக்குத்துத் தளம் ஒன்றில் ஓய்கின்றது. இவ்வுச்சிகளினூடான அடியானது கிடைத்தரையுடன் ஆக்கும் மிகக் குறைந்த கோணம் θ எனின் $\cot\theta = 2\mu + \frac{1}{\sqrt{3}}$ எனக் காட்டுக. இங்கு μ உராய்வுக்குணகம்

15. $2a$ நீளமும் W நிறையும் கோண்ட ஒரு சீரான ஏணி AB ஆனது தன்முனை A ஒரு கரடான கிடைத் தரையிலும் மறுமுனை B கரடான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு எதிரே இருக்குமாறு ஓய்கின்றது. ஏணியின் இருமுனைகளிலுமுள்ள உராய்வுக்குணகம் μ. கிடையுடன் ஏணியின் சாய்வு $\frac{\pi}{4}$ ஆயும் nW நிறை கொண்ட சிறிய பூனையொன்று A யிலிருந்து ஏணி வழியே ஏறுகின்றது. ஏணியின் எல்லைச் சமநிலையில் உள்ளபோது பூனையானது ஏணி வழியே ஏறிய தூரம் $\frac{a}{n\left(1+\mu^2\right)}\left[\mu^2(1+2n)+2\mu(1+n)-1\right]$ எனக்காட்டுக. மேலும் $\mu = \frac{1}{2}$ எனத் தரப்படும்போது $n < \frac{1}{4}$ எனின் பூனையானது ஏணி வழுக்குமுன் ஏணியின் உச்சிவரை ஏறமுடியும் எனக் காட்டுக. $n = \frac{1}{4}$ எனின் யாது நடைபெறும்?

16. l நீளமும் W நிறையும் கொண்ட ஒரு சீரான ஏணி AB யின் ஒரு முனை A கரடான கிடைத் தரையிலும் மறுமுனை B ஒரு ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கெதிரேயும் இருக்குமாறு ஓய்கின்றது. ஏணியானது கிடையுடன் α கோணத்தால் சாய்ந்து சுவருக்குச் செங்குத்தான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளது. தரைக்கும் ஏணிக்குமிடைப்பட்ட உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும். கோலிலுள்ள புள்ளி C இல் சுவரை நோக்கிய திசையில் ஒரு கிடைவிசை P பிரயோகிக்கப்படுகின்றபோது [இங்கு $AC = a(<\ell)$ கோல் எல்லைச் சமநிலையை அடைகின்றது. இந்நிலையில் ஏணியானது சுவரை நோக்கி வழுக்கும் தறுவாயிலுள்ளது. $\mathrm{P} = \frac{\ell w}{2(\ell - a)}\left(2\mu + \tan\alpha\right)$ எனக் காட்டுக.

17. சமநிறையும் வெவ்வேறு நீளங்களையும் கொண்ட AB, BC என்ற சீரான கோல்கள் B இல் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டு சம கரடானதும் ஒரே கிடைக்கோட்டிலுமுள்ள இரு முனைகளின் மீது வைக்கப்பட்டு ஒரு நிலைக்குத்து தளத்தில் உள்ளன. கோல்கள் கிடையுடன் அமைக்கும் கோணங்கள் α, β ஆயும் இரு முனைகளிலும் கோல் வழுக்கும் தறுவாயிலும் உள்ளன. மூட்டு B யிலுள்ள பிணையல் மறுதாக்கம் கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் θ எனின் $2\tan\theta = \cot(\beta+\lambda) - \cot(\alpha-\lambda)$ எனக் காட்டுக. இங்கு λ உராய்வுக் கோணம்.

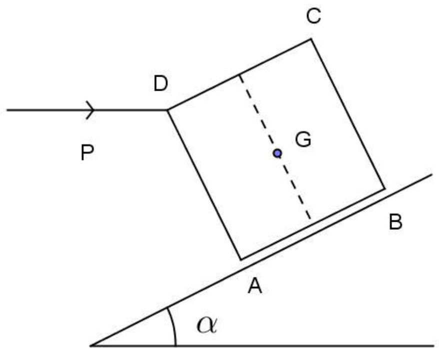
18. l நீளமுடைய இரு சம ஏணிகள் அவற்றினை உச்சிப்புள்ளிகளில் பிணைக்கப்பட்டு உச்சிக் கோணம் 2θ ஆக உள்ள ஒரு இரு சமபக்க முக்கோண வடிவில் மறுமுனைகள் கரடான கிடைத்தளத்தில் தங்க ஓய்விலுள்ளன. ஏணி ஒன்றின் நிறையின் n மடங்கு நிறையுள்ள ஒரு மனிதன் ஏணி ஒன்றில் மெதுவாக மேலேறுகின்றான். உச்சியிலிருந்து அவனின் தூரம் x ஆக இருக்கும் போது தரையிலுள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க. மேலும் $\frac{nx}{\ell} = \frac{2\mu - \tan\theta}{\mu - \tan\theta} + n$ ஆகும்போது வழுக்க ஆரம்பிக்கும் எனக் காட்டுக.

19. சீரான a ஆரையுடைய உருளையொன்றானது அதன் அச்சு கிடை மேசையொன்றுக்கு சமாந்தரமாக இருக்குமாறு, கிடைமேசையொன்றுடன் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. $6a$ நீளமும் M திணிவுமுடைய ஓர் சீர்க்கோல் ACB ஆனது மேசை மீது இருக்க புள்ளி C யில் உருளையைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்க, கோலினூடான நிலைக்குத்துத் தளமானது உருளையின் அச்சுக்கு செங்குத்தாக இருக்க மேசையுடன் கோலானது 2θ கோணம் அமைத்து சமநிலையிலுள்ளது.

    (a) உருளையினால் கோலின் மீது தாக்கும் விசையின் பருமன் $3\text{Mg}\cos 2\theta.\tan\theta$ எனக் காட்டுக.

    (b) கோல் சமநிலையிலிருப்பின், கோலிற்கும் மேசைக்கும் இடையிலான உராய்வுக் குணகம் μ ஆனது $\mu(\cot\theta - 3\cos^2 2\theta) = 3\sin 2\theta\cos 2\theta$ ஆல் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

20.



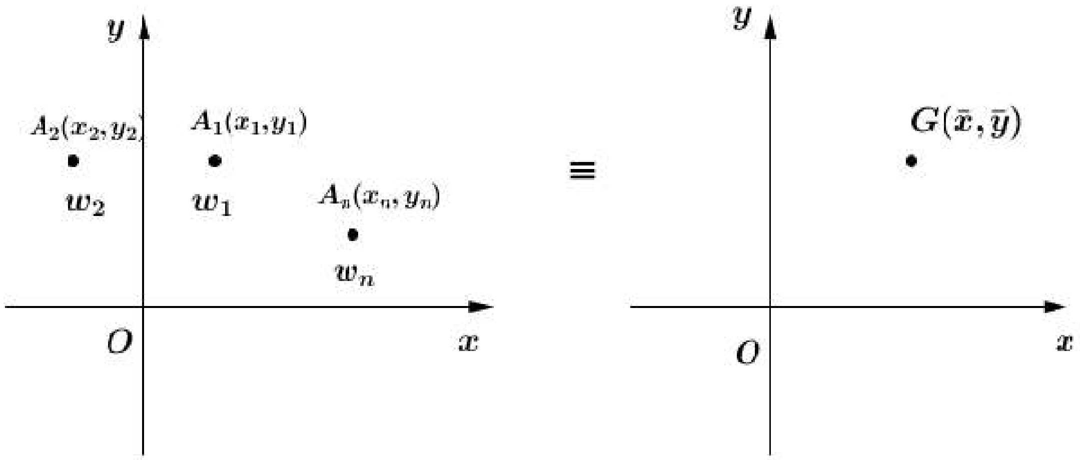
W நிறையும் $2a$ பக்க நீளமும் உடைய சீரான கனவுரு ஒன்றின் குறுக்குவெட்டினை ABCD குறிக்கின்றது. இக்கனவுருவானது கிடையுடன் α சாய்வுடைய சாய்தளம் ஒன்றில் வைக்கப்பட்டு, உருவில் காட்டியவாறு படிப்படியாக அதிகரிக்கும். ஓர் கிடைவிசை P ஆனது புள்ளி D யில் பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. கனவுருக்கும் தளத்திற்கும் இடையிலான உராய்வுக்குணகம் M ஆகும். சமநிலை சாத்தியமாகுமாறு M இன் சாத்தியமான பெறுமானவீச்சினைக் காண்க. இங்கு $\tan\alpha = \frac{1}{2}$.

8.0 புவியீர்ப்புமையம்

8.1 ஒரு உடல் அல்லது துணிக்கைத் தொகுதியின் புவியீர்ப்புமையம்

ஒரு உடல் அல்லது விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டுள்ள துணிக்கைத் தொகுதியின் புவியீர்ப்புமையம் என்பது அவ்வுடல் எந்நிலையில் வைக்கப்பட்டிருப்பினும் நிறையின் தாக்கக்கோடு எப்பொழுதும் செல்லும் புள்ளியைக் குறிக்கும்.

துணிக்கைத் தொகுதியொன்றின் புவியீர்ப்புமையம்



$w_1, w_2, \ldots\ldots\ldots\ldots w_n$ என்பன ஒரு தளத்தில் $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots A_n$ புள்ளிகளிலும் வைக்கப்பட்டுள்ள துணிக்கைகளாகும். OX, OY என்பன ஆள்கூற்று அச்சுக்களாயும் இத்துணிக்கைகள் வைக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (x_n, y_n)$ ஆகவுமுள்ளது. தளம் OXY சார்பாக புவியீர்ப்புமைய ஆள்கூறுகள் $(\bar{x}, \bar{y})$ எனின் துணிக்கைத் தொகுதியின் நிறைகள் $(\bar{x}, \bar{y})$ இனூடாகச் செல்லும் விளையுள் $(w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + w_n)$ ஆயுள்ள சமாந்தர விசைத்தொகுதியாகும்.

துணிக்கைத் தொகுதியுள்ள, தளம் கிடையாகவும் OX, OY பற்றி விசைத்தொகுதி விளையுள் என்பவற்றிற்கு திருப்புதிறன் எடுப்பின்

$$\text{OY} \quad \bar{x}\left(w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n\right) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + w_n x_n$$

$$\bar{x}\sum_{i=1}^{\mathrm{r}} w_i = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}} \mathrm{W}_i x_i$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

$$\text{OX)}\quad \bar{y}\left(w_1 + w_2 + \dots\dots\dots + w_n\right) = w_1 y_1 + w_2 y_2 + \dots\dots\dots\dots + w_n y_n$$

$$\bar{y}\sum_{i=1}^{\mathrm{r}} w_i = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}} \mathrm{W}_i y_i$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

குறிப்பு:

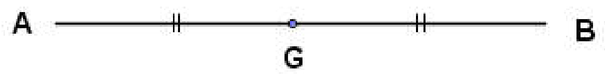
சீரான உடலில் திணிவு மையம், புவியீர்ப்புமையம் என்பன ஒரே புள்ளியாகும்.

சீரானகோல் ஒன்றின் புவியீர்ப்புமையம்

AB என்பது சீரானகோல்.

G என்பது கோலில் நடுப்புள்ளி

எனின் G என்பது புவியீர்ப்பு மையமாகும்.

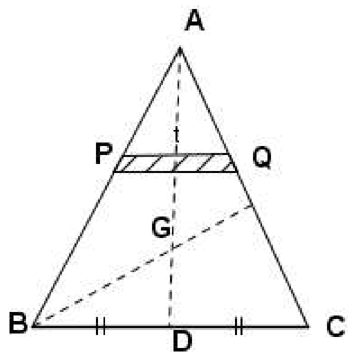


சீரான முக்கோண அடரின் புவியீர்ப்புமையம்

ABC என்பது ஒரு சீரான முக்கோண அடராகும். அடரானது BC இற்ச் சமாந்தரமான சிறுசிறு கீலங்களாகப் (Pa) பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.

ஒவ்வொரு கீலத்தினதும் புவியீர்ப்பு மையமானது அதன் நடுப்புள்ளியில் அமைந்திருக்கும்.

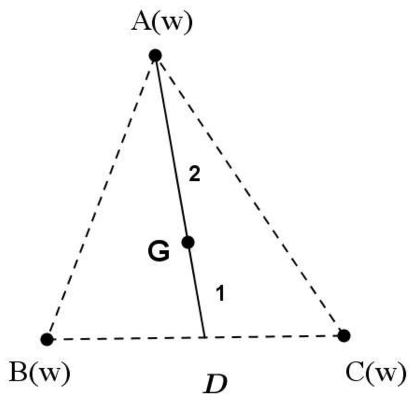
எனவேமுக்கோண அடரின் புவியீர்ப்பு மையமானது அக்கீலங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில் அமைந்திருக்கும். இது AO என்ற இடையமாகும். இதேபோன்று இப்புவியீர்ப்பு மையமானது B, C யினூடு செல்லும் இடையங்களிலும் அமைந்திருக்கும். எனவே முக்கோண அடரின் புவியீர்ப்பு மையமானது இடையங்களின் வெட்டுப்புள்ளியாகும்.



இடையங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியானது உச்சியிலிருந்து $\frac{2}{3}$ பங்கு தூரம் ஆகையால்

$\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{GD}} = \frac{2}{1}$.

முக்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளில் வைக்கப்பட்டுள்ள மூன்று சம துணிக்கைகளின் புவியீர்ப்புமையம்



D என்பது BC யின் நடுப்புள்ளி B, C யிலுள்ள W நிறைகள் D யிலுள்ள $2W$ இற்கு சமவலுவானவை.

எனவே தரப்பட்ட தொகுதியானது A யில் W இற்கு D இல் $2W$ இற்கும் சமவலுவானது.

A யிலுள்ள W உம் D யிலுள்ள $2W$ உம் சேர்ந்து G இல் $3W$ இற்கு சமவலுவானது. இங்கு $AG : GD = 2 : 1$

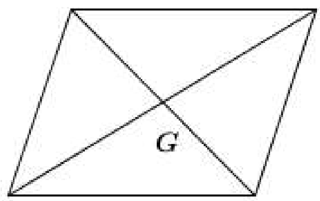
எனவே தொகுதியின் புவியீர்ப்பு மையமானது இடையங்களின் வெட்டுப்புள்ளயாகும்.

எனவே ஒரு சீரான முக்கோண அடரின் புவியீர்ப்பு மையமானது முக்கோண உச்சிகளில் வைக்கப்படும். மூன்று சமதுணிக்கைகளின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கு சமவலுவானது.

8.2 சீரான அடர்களின் புவியீர்ப்புமையம்

சீரான இணைகர அடர் ஒன்றின் புவியீர்ப்புமையம்

சீரான இணைகர அடர் ஒன்றின் புவியீர்ப்பு மையமானது இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்களின் இடைவெட்டுப்புள்ளியாகும்.



சீரான வட்டவளையம் ஒன்றின் புவியீர்ப்புமையம்

ஒரு வட்டவவளையமானது எந்த ஒரு விட்டம் பற்றியும் சமச்சீரானது. எனவே விட்டங்கள் சந்திக்கும்புள்ளி புவியீர்ப்பு மையத்தைத் தரும். எனவே வளையத்தின் புவியீர்ப்புமையம் அதன் மையமாகும்.

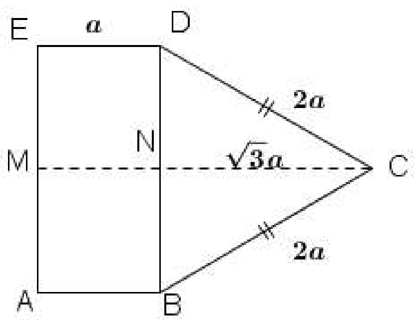
சீரான வட்டத்தட்டு ஒன்றின் புவியீர்ப்புமையம்

வட்டவடிவமான தட்டு ஒன்றின் புவியீர்ப்புமையம் அதன் விட்டம் பற்றி சமச்சீரானது ஆகையால் அதன் புவியீர்ப்புமையம் மையத்தில் அமைந்திருக்கும்.

8.3 செய்து காட்டப்பட்ட உதாரணங்கள்

உதாரணம் 1

செவ்வக அடர் ஒன்றின் ஒருபக்கம் மற்றையதின் இருமடங்கு ஆகும். நீளமான பகுதியில் ஒரு சமபக்க முக்கோண அடர் படத்திலுள்ளவாறு பொருத்தப்பட்டுள்ளது. கூட்டுருவின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. $AB = a$, என்க $AE = 2a$



சமச்சீரின் புவியீர்ப்புமை MC வழியே இருக்கும்.

ABDE இன் பரப்பு $= 2a^2$

BCD இன் பரப்பு $= \sqrt{3}a^2$

அலகுப்பரப்பின் நிறை W என

அடர்	நிறை	MC வழியே M இலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தூரம்
ABDE	$4a^2$w	$\frac{a}{2}$
BDC	$\sqrt{3}a^2$w	$a+\frac{1}{3}\sqrt{3}a$
ABCDE	$a+\frac{1}{3}\sqrt{3}a$	$\overline{x}$

பற்றி திருப்பம் எடுப்பின் AE

$$\text{AE} \qquad \left(2+\sqrt{3}\right)a^2\text{w}\ \overline{x} = 2a\text{w}\ \frac{a}{2}+\sqrt{3}a^2\text{w}\left(a+\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\ \overline{x} = a+\sqrt{3}a+a$$

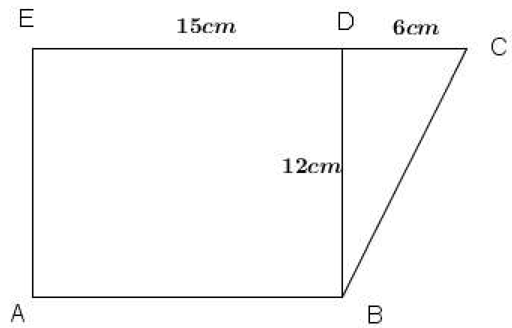
$$=\left(2+\sqrt{3}\right)a$$

$$\overline{x} = a$$

கூட்டுப்பொருளின் புவியீர்ப்பு மையமானது N இல் அமையும். (MD இன் நடுப்புள்ளி N)

உதாரணம் 2

ABCE என்பது ஒரு சீரான அடர். ABDE என்பது ஒரு செவ்வகம் BCD என்பது செங்கோண முக்கோணி இவ்வடரின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. இவ்வடரானது C யிலிருந்து தொங்கவிடப்படும்போது நிலைக்குத்துடன் CE ஆக்கும் கோணத்தைக் கணிக்க.



ABDE இன் பரப்பு = 15 x 12 = 180 cm^2

BCD இன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\times 12\times 6 = 36\ \text{cm}^2$

அலகு பரப்பின் நிறை = w என்க.

அடர்	நிறை	AE இலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தூரம்	AB இலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தூரம்
ABDE	$180w$	$\frac{15}{2}$ cm	6 cm
BCD	$36w$	$15+\frac{1}{3}\times 6=17$ cm	$\frac{2}{3}\times 12=8$ cm
ABCE	$216w$	$\overline{x}$	$\overline{y}$

AE பற்றி திருப்பம் எடுத்தால்

$$216w\,\overline{x}=180w\times\frac{15}{2}+36w\times 17$$
$$12\,\overline{x}=75+34$$
$$=109$$
$$\overline{x}=\frac{109}{12}\text{ cm}$$

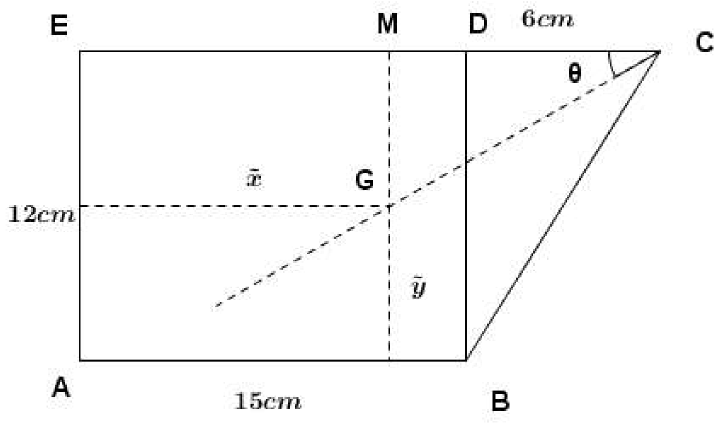
AB பற்றி திருப்பம் எடுத்தால்

$$216w\,\overline{y}=180w\times 6+36w\times 8$$
$$12\,\overline{y}=60+16$$
$$=76$$
$$\overline{y}=\frac{19}{3}\text{ cm}$$

புவியீர்ப்பு மையமானது AEஇல் இருந்து $\frac{19}{3}$ cm தூரத்திலும் AB இல் இருந்து $\frac{109}{12}$ cm தூரத்திலும் இருக்கும்.

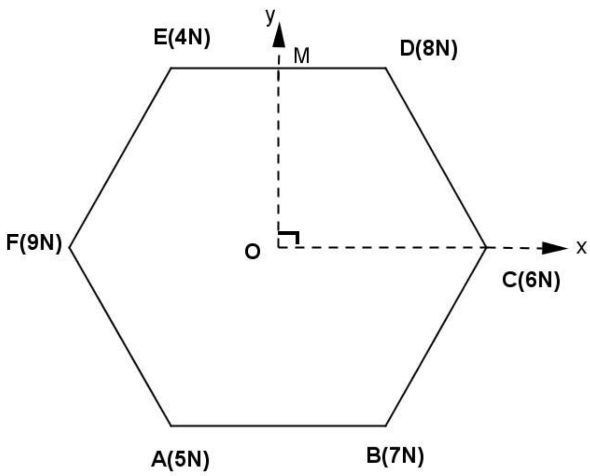
C இல் இருந்து தொங்கவிடப்படும்போது CG நிலைக்குத்து கோடாக இருக்கும்.

$$\tan\theta=\frac{MG}{CM}$$
$$=\frac{12-\overline{y}}{21-\overline{x}}$$
$$=\frac{12-\frac{19}{3}}{21-\frac{109}{12}}$$
$$=\frac{68}{143}$$
$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{68}{143}\right)$$



உதாரணம் 3

5N, 7N, 6N, 8N, 4N, 9 N நிறையுள்ள துணிக்கை ஒழுங்காக எடுக்கப்பட்ட அறுகோணி ஒன்றின் உச்சியில் வைக்கப் பட்டுள்ளன. இத்துணிக்கைகளின் புவியீர்ப்பு மையமானது அறுகோணியின் மையத்துடன் பொருந்துகின்றது எனக் காட்டுக.



அறுகோணியின் பக்கநீளம் $2a$ ஆயும் O அறுகோணியின் மையம் ஆயும் OC, OM என்பவற்றை முறையே x, y அச்சுக்களாயும் கொள்க.

$AB = 2a \Rightarrow OC=2a=OD$

$OM = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a$

புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆள்கூறுகள் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்க.

OC பற்றி திருப்பம் எடுப்பின்,

$$6.2a + 8.a + 7.a + 4.(-a) + 5.(-a) + 9.(-2a) = (6+8+7+4+5+9)\bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{27a - 27a}{39}$$

$$= 0$$

OM பற்றி திருப்பம் எடுப்பின்,

$$8.a\sqrt{3} + 4.a\sqrt{3} + 6.0 + 9.0 + 5.(-a\sqrt{3}) + 7.(-a\sqrt{3}) = (6+8+7+4+5+9)\bar{y}$$

$$\bar{y} = \frac{12a\sqrt{3} - 12a\sqrt{3}}{39}$$

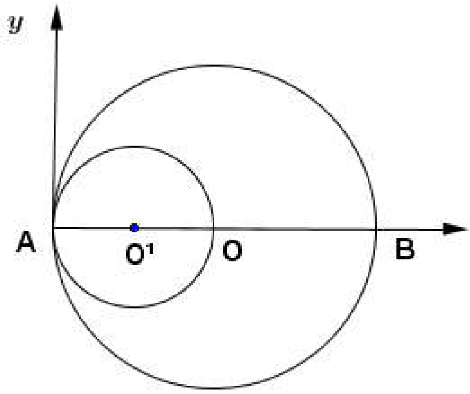
$$= 0$$

புவியீர்ப்புமையம் G ஆனது O உடன் பொருந்துகின்றது.

உதாரணம் 4

r ஆரையுள்ள சீரான வட்டத்தட்டு ஒன்றிலிருந்து $\frac{r}{2}$ ஆரையுள்ள வட்டத்தட்டு பெரிய வட்டத்தட்டின் ஆரையை விட்டமாகக் கொண்டு வெட்டி அகற்றப்படுகின்றது. எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

தீர்வு



தரப்பட்ட பெரிய வட்டத்தட்டின் விட்டம் AB ஆயும் மையம் O ஆகவும் உள்ள AO ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத் தட்டின் மையம் O′ என்க. w என்பது அலகுப் பரப்பின் நிறையாகும்.

பெரிய வட்டத்தட்டின் நிறை = $\pi r^2 w$

சிறிய வட்டத்தட்டின் நிறை = $\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 w = \frac{1}{4}\pi r^2 w$

G என்பது எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்புமையம். G ஆனது சமச்சீரினால் AB இல் இருக்கும். AY பற்றி திருப்பம் எடுப்பின்

$$r\left(\pi r^2 w - \frac{\pi}{4} r^2 w\right)\text{AG} = \pi r^2 w \times \text{AO} - \frac{\pi}{4} r^2 w \times \text{AO}^{|}$$

$$= \frac{\pi r^2 w.\,\text{r} - \frac{\pi}{4} r^2 w.\frac{\text{r}}{2}}{\frac{3}{4}\pi r^2 w}$$

$$= \frac{\frac{7}{8}r}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{7}{6}r$$

எஞ்சிய உடலின் புவியீர்ப்பு மையமானது பெரிய வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து விட்ம் வழியே $\frac{7}{6}r$ தூரத்தில் இருக்கும்.

உதாரணம் 5

ABCD என்பது 2a பக்கமுடைய சதுர அடராகும். E என்பது BC இன் நடுப்புள்ளி AECD என்ற பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தூரத்தை A இலிருந்து காண்க.

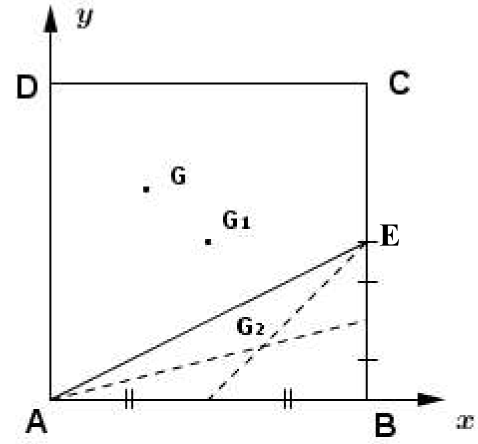
AB, AD என்பவற்றை முறையே x, y அச்சுகளாகக் கொள்க. w என்பது அலகுப் பரப்பின நிறை.

ABCD இன் நிறை $= 4a^2 w$

ABE இன் நிறை $= \frac{1}{2}.\,2a^2 w = a^2 w$

G_1, G_2 என்பன முறையே ABCD, ABE என்பவற்றின் புவியீர்ப்பு மையப் புள்ளிகளாயும் G என்பது ABCD உடலின் புவியீர்ப்பு மையம் எனவும் கொள்க.

$G = (\bar{x}, \bar{y})$.

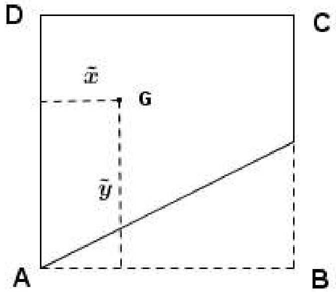


AD பற்றி திருப்பம் எடுப்பின்

$$\left(4a^2w - a^2w\right)\bar{x} = 4a^2w \times a - a^2w \times \frac{2}{3}\times 2a$$
$$3a^2w\,\bar{x} = \frac{8}{3}a^3w$$
$$\bar{x} = \frac{8}{9}a$$

AB பற்றி திருப்பம் எடுப்பின்

$$\left(4a^2w - a^2w\right)\bar{y} = 4a^2w \times a - a^2w \times \frac{1}{3}\times a$$
$$3a^2w\,\bar{y} = \frac{11}{3}a^3w$$
$$\bar{y} = \frac{11}{9}a$$



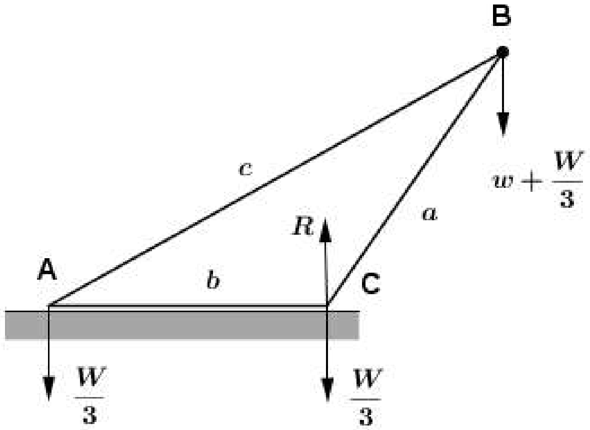
$$AG^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$$
$$= \left(\frac{8a}{9}\right)^2 + \left(\frac{11a}{9}\right)^2$$
$$= \frac{\sqrt{185}}{9}a$$

உதாரணம் 6

C இல் விரிகோணமுடைய ABC என்னும் சீரான முக்கோண அடரானது அதன் பக்கம் கிடையான மேசை ஒன்றுடன் தொடுகையிலுள்ள. உச்சி B இலிருந்து தொங்கவிடத்தக்க அதிகூடிய நிறை w எனின் $w = \frac{1}{3}W\left(\frac{a^2+3b^2-c^2}{c^2-a^2-b^2}\right)$,எனக்காட்டுக. இங்கு W என்பது அடரின் நிறை. a, b, c என்பன வழமை குறியீட்டுடனான நீளங்கள்.

அடரின் புவியீர்ப்பு மையமானது Δ இன் உச்சிகளின் மீது சம நிறைகள் வைக்கப்படும் போதுள்ள புவியீர்ப்பு மையமாகும்.

A, B, C இல் $\frac{1}{3}W$ தாக்கும்.



Bஇல் அதிகூடிய நிறை தொங்கவிடப் படும்போது மேசையினாலான மறுதாக்கம C யினூடு இருக்கும்.

m l upl ; ep w W ஆனது உச்சிகள் A, B, C இல் வைக்கப்பட்ட $\frac{W}{3}$ நிறையுடைய மூன்று துணிக்கைகளாக கருதப்படலாம். அடரின் நிறை W ஆனது அதிகரிக்கையில், அடரானது புள்ளி C பற்றி கவிழத் தொடங்கும். W உயர்வாக மறுதாக்கம் R ஆனது C யில் அதிகரிக்கும்.

C பற்றி திருப்பம் எடுப்பின்,

$$\left(w+\frac{W}{3}\right)a\cos(\pi-c)-\frac{W}{3}.b=0$$

$$\left(\frac{w+\frac{W}{3}}{\frac{W}{3}}\right)=\frac{b}{-a\cos c}=\frac{b}{-a\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}=\frac{2b^2}{c^2-a^2-b^2}$$

$$\frac{w}{\frac{W}{3}}=\frac{2b^2-(c^2-a^2-b^2)}{c^2-a^2-b^2}$$

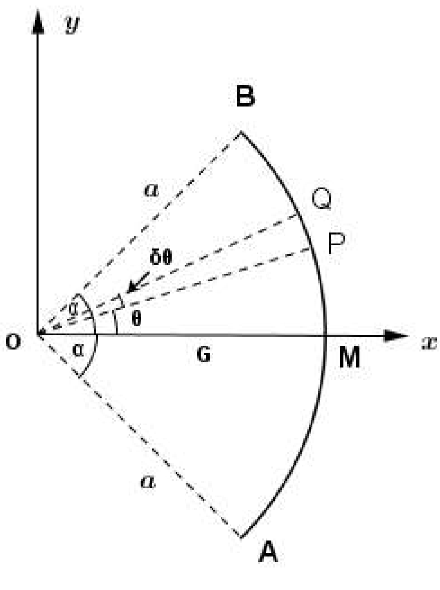
$$w=\frac{W}{3}\left(\frac{3b^2+a^2-c^2}{c^2-a^2-b^2}\right)$$

ஆரைச்சிறையின் புவியீர்ப்புமையம்

AB என்பது a ஆரையுடைய வட்டத்திலிருந்து பெறப்பட்ட ஆரைச்சிறை. O மையம். AB ஆனது மையத்தில் 2α கோணம் எதிரமைக்கின்றது.

P, Q என்பது AB இல் மிக அண்மையிலுள்ள இரு புள்ளிகள். $\mathrm{P\hat{O}Q}=\delta\theta$, $\mathrm{M\hat{O}P}=\theta$

வில்லின் நடுப்புள்ளி M, அலகு நீளத்துக்கான நிறை w.



$$\mathrm{PQ}=a\ \delta\theta\ \mathrm{w}$$

$$\text{AB ஆரைச்சிறையின் நிறை}=\int_{-\infty}^{+\infty}a\ d\theta\ \mathrm{w}$$

புள்ளி O இலிருந்து புவியீர்பு மையம் $a\cos\theta$.

சமச்சீரின்படி வில் AB இன் நடுப்புள்ளி OM இல் இருக்கும்.

G என்பது வில் AB இன் புவியீர்ப்பு மையமாகும்.

O வைப் பற்றி திருப்பம் எடுக்க.

$$\left[\int_{-\alpha}^{+\alpha} a\, d\theta\, w\right]\text{OG} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} a\, d\theta\, w\, .\, a\cos\theta$$

$$aw\int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta\, .\text{OG} = a^2 w\int \cos\theta\, d\theta$$

$$aw[\theta]_{-\alpha}^{+\alpha}.\text{OG} = a^2 w[\sin\theta]_{-\alpha}^{+\alpha}$$

$$aw\, .\, 2\alpha .\ \text{OG} = a^2 w\, .\, 2\sin\alpha$$

$$\text{OG} = \frac{a\sin\alpha}{\alpha}$$

உய்த்தறிதல்:

அரைவட்ட வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம்

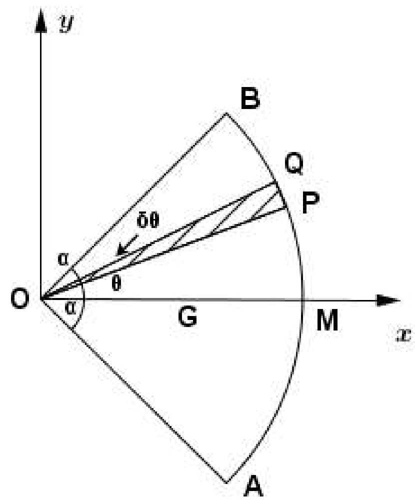
$\alpha = \frac{\pi}{4}$ ஆக $\quad \text{OG} = \dfrac{a\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2a}{\pi}$

ஆரைச்சிறையின் புவியீர்ப்புமையம்

AOB என்பது a ஆரையுடைய வட்டத்திலிருந்து பெறப்பட்ட ஆரைச்சிறை O மையம்

AB ஆனது மையத்தில் 2α கோணம் எதிரமைக்கின்றது.

P, Q என்பன வில் AB இல் மிக அண்மையிலுள்ள இரு புள்ளிகள். $M\hat{O}P = \theta$, $P\hat{O}Q = \delta\theta$. m ஓரலகு பரப்புக்கான நிறை



Δ POQ நிறை $= \frac{1}{2}a^2\delta\theta\, m$

AOB என்னும் பகுதியின் நிறை $\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{1}{2}a^2 d\theta\, m$

O இல் இருந்து AOB இன் நடுப்புள்ளிக்கான தூரம் $\frac{2}{3}a\cos\theta$

சமச்சீரினால் புவியீர்ப்புமைய G , OM இல் இருக்கும்.

O பற்றி திருப்பம் எடுப்பதனால்,

$$\left[\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{1}{2}a^2 d\theta . m\right]\text{OG} = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{1}{2}a^2 d\theta . m.\frac{2}{3}a\cos\theta$$

$$\frac{ma^2}{2}\left[\theta\right]_{-\alpha}^{+\alpha}.\text{OG} = \frac{ma^3}{3}\left[\sin\theta\right]_{-\alpha}^{+\alpha}$$

$$\frac{ma^2}{2}\left[2\alpha\right].\text{OG} = \frac{ma^3}{3}.2\sin\alpha$$

$$\text{OG} = \frac{2}{3}.a\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

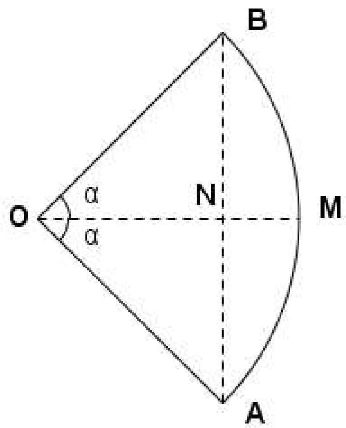
உய்த்தறிதல்:

அரைவட்ட வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம் $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ஆக $\text{OG} = \frac{2}{3}\frac{a\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a}{3\pi}$

வட்டத்துண்டம் ஒன்றின் புவியீர்ப்புமையம்

AMB என்பது O வை மையமாகவும் a ஐ ஆரையாகவும் உடைய வட்டத்தின் துண்டமாகும். சமச்சீரின் படி புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது OM இல் இருக்கும்.

w - ஓரலகு பரப்புக்கான நிறை.



உரு	நிறை	O இலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்துக்கான தூரம்
பகுதி OAMB	$\frac{1}{2}a^2.2\alpha.w$	$\frac{2}{3}a\frac{\sin\alpha}{\alpha}$
முக்கோணி OAB	$\frac{1}{2}.2a\sin\alpha\ .\ a\cos\alpha.\ w$	$\frac{2}{3}a\cos\alpha$
துண்டம் AMB	$a^2(\alpha - sin\,\alpha\cos\alpha)w$	OG

O பற்றி திருப்பம் எடுப்பதனால்,

$$a^2(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)w\,.\,\mathrm{OG}=\frac{1}{2}a^2\,.\,2\alpha\,.\,w\,.\frac{2}{3}a\sin\alpha-\frac{1}{2}\,.\,2a\sin\alpha\,.\,a\cos\alpha\,.\,w\,.\frac{2}{3}a\cos\alpha$$

$$(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)w\,.\,\mathrm{OG}=\frac{2}{3}a\sin\alpha-\frac{2}{3}a\sin\alpha\cos^2\alpha$$

$$=\frac{2}{3}a\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)$$

$$=\frac{2}{3}a\sin^2\alpha$$

$$\mathrm{OG}=\frac{2a\sin^3\alpha}{3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)}$$

உய்த்தறிதல்:

$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ ஆக, துண்டமானது அரைவட்டவில்லாகும், $\mathrm{OG}=\dfrac{4a}{3\pi}$.

அரைக்கோளத் திண்மம் ஒன்றின் புவியீர்ப்புமையம்

பொட் கோளத்தின் மையம் O ஆரை a. OM சமச்சீர் அச்சு. சமச்சீரினால் புவியீர்ப்பு மையம் வழியே OM வழியே இருக்கும்.

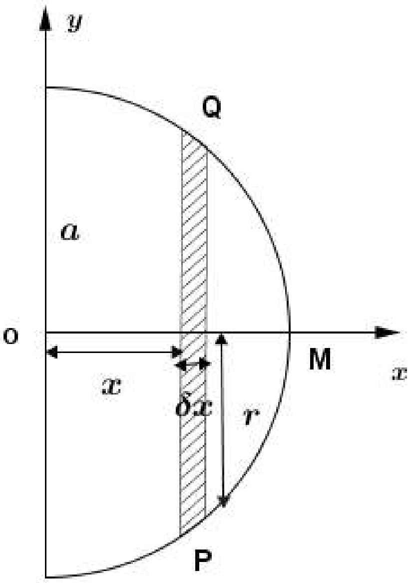
PQ என்பது δx தடிப்புள்ள வட்டத்தட்டு.

w என்பது அரைக்கோளத்தின் அடர்த்தி.

$$\mathrm{PQ}\text{ நிறை}=\pi r^2\delta x.\mathrm{w}$$

PQ, $\pi(a^2-x^2)\delta x$ w O இலிருந்து இன் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கான தூரம் x

$\therefore$ அரைக்கோளத்தின் நிறை= $\int_0^a \pi\left(a^2-x^2\right)dx$ w



சமச்சீரினால் புவியீர்ப்பு மையG, OM இல் இருக்கும்.

O பற்றி திருப்பம் எடுப்பதனால்,

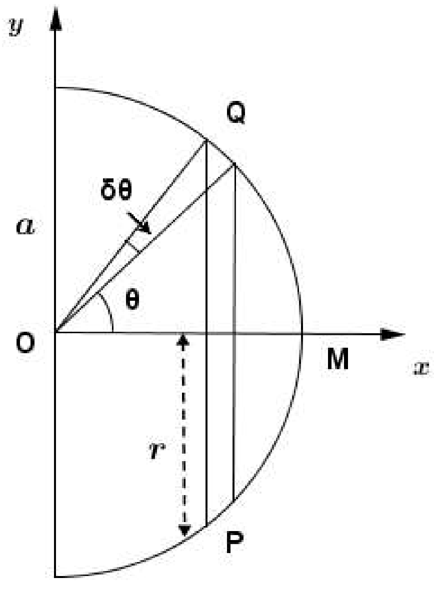
$$\left[\int_0^a \pi\left(a^2-x^2\right)dx.w\right] \text{OG} = \int \pi\left(a^2-x^2\right)dx.w.x$$

$$\pi w\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a \text{ OG} = \pi w\left[\frac{a^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^a$$

$$\pi w\times\frac{2}{3}a^3.\text{ OG} = \pi w.\ \frac{a^4}{4}$$

$$\text{OG} = \frac{3}{8}a$$

பொள் அரைக்கோளம் ஒன்றின் புவியீர்ப்புமையம்



பொள் அரைக்கோளத்தின் மையம் O ஆரை a OM சமச்சீர் அச்சு சமச்சீரினால் புவியீர்ப்புமையம் G, OM வழியே இருக்கும்.

PQ என்ற கீலத்தின் வட்டக்கீலம் $a\sin\theta$ O இலிருந்து தூரம் $a\cos\theta$.

PQ நிறை $= (2\pi a\delta\theta)(a\delta\theta).w$

PQ தூரம் O இல் $a\cos\theta$.

$\therefore$ பொட்கோளத்தின் திணிவு $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a\sin\theta\ a\ d\theta\ w$

O பற்றி திருப்பம் எடுப்பின்

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a\sin\theta\ a\ d\theta\ w\right] \text{OG} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a\sin\theta\ a\ d\theta\ wa\cos\theta$$

$$2\pi a^2w\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\ d\theta.\ \text{OG} = \pi a^3w\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\ d\theta$$

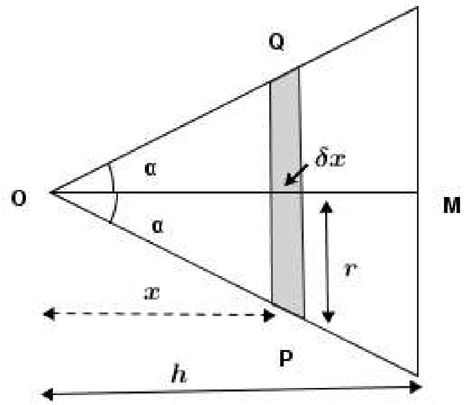
$$2\pi a^2w\left[\text{-}\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}.\text{OG} = \pi a^3w\left[\frac{\text{-}\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$2\pi a^2w\left[0\text{-}(\text{-}1)\right]\ .\text{OG} = \ \pi a^3w$$

$$\text{OG} = \ \frac{a}{2}$$

திண்மக் கூம்பு ஒன்றின் புவியீர்ப்புமையம்

கூம்பின் உயரம் h என்க. அரையுச்சிக்கோணம் α என்க. சமச்சீரினால் புவியீர்ப்பு மையம் OM வழியே இருக்கும்.



சிறுவட்டக்கீலம் PQ இன் நிறை δx தூரம் x , O

$$\text{நிறை PQ} = \pi r^2 \delta x \text{ w g}$$

$$= \pi (x \tan\alpha)^2 fx.\text{w g}$$

$$\text{கூம்பின் நிறை} = \int_0^h \pi x^2 \tan^2 \alpha . dx \text{ w.g}$$

O இல் இருந்து கீலத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கான தூரம் x

O பற்றித் திருப்பம் எடுத்தால்

$$\text{OG} . \left[\int_0^h \pi x^2 \tan^2 \alpha \; dx \; w \right] = \int_0^h \pi x^2 \tan^2 \alpha \; dx \; w.x$$

$$\text{OG} . \left[\pi \tan^2 \alpha \; w \int_0^h x^2 dx \right] = \pi \tan^2 \alpha \; w \int_0^h x^3 dx$$

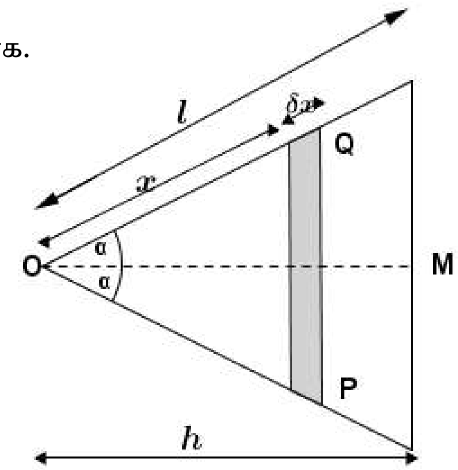
$$\text{OG} . \pi \tan^2 \alpha \; w \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^h = \pi \tan^2 \alpha \; w \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^h$$

$$\text{OG} . \frac{\pi}{3} h^3 \tan^2 \alpha \; w = \frac{\pi}{4} h^4 \tan^2 \alpha \; w$$

$$\therefore \text{ OG} = \frac{3}{4} h$$

பொள் கூம்பு ஒன்றின் புவியீர்ப்புமையம்

கூம்பின் உயரம் h என்க. அரையுச்சிக்கோணம் α என்க.



PQ என்ற கீலத்தின் தடிப்பு δx O இலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத் தூரம் $x \cos\alpha$

சமச்சீரினால் புவியீர்ப்பு மையம் OM வழியே இருக்கும்.

அலகுப் பரப்பின் நிறை w .

$$\text{PQ நிறை} = 2\pi \left(x \sin\alpha \right) \delta x.\text{w}$$

$$\text{கூம்பின் நிறை} = \int_0^{\ell} 2\pi \left(x \sin\alpha \right) dx.\text{w}$$

O பற்றி திருப்பம் எடுத்தால்,

$$\text{OG}.\left[\int_0^{\ell} 2\pi(x\sin\alpha)\, dx.w\right] = \int_0^{\ell} 2\pi x\sin\alpha\, dx\,.\,x\cos\alpha.w$$

$$\text{OG}.2\pi\,\sin\alpha.w\int_0^{\ell} x\,dx = 2\pi\sin\alpha\,\cos\alpha\int x^2 dx.w$$

$$\text{OG}.2\pi\sin\alpha.w\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^{\ell} = 2\pi\sin\alpha\cos\alpha.w\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^{\ell}$$

$$\text{OG}.\left[2\pi\sin\alpha\; w\;\frac{\ell^2}{2}\right] = 2\pi\sin\alpha\cos\alpha.w\frac{\ell^3}{3}$$

$$\text{OG} = \frac{2}{3}\ell\cos\alpha$$

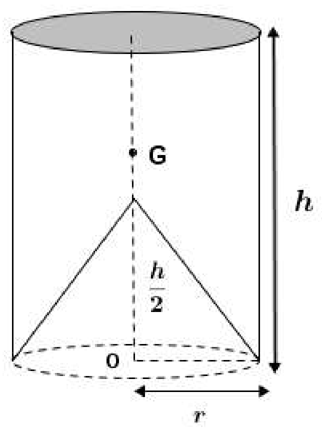
$$\text{OG} = \frac{2}{3}h$$

உதாரணம் 7

r ஆரையும் h, உயரமும் கொண்ட திண்ம செவ்வட்ட உருளை ஒன்றிலிருந்து r அடி ஆரையும் $\frac{h}{2}$ உயரமும் கொண்ட திண்மச் செவ்வட்ட கூம்பு ஒன்று அதன் அடி ஆரை உருயையின் அடி ஆரையுடன் பொருந்துமாறு குடைந்து எடுத்து அகற்றப்படுகின்றது. எஞ்சிய உடலின் புவியீர்ப்பு மையமானது அச்சு வழியே கூம்பின் அடியிலிருந்து $\frac{23h}{40}$ தூரத்தில் இருக்குமென நிறுவுக.

சமச்சீரினால் எஞ்சிய உடலின் புவியீர்ப்புமையம் O இனூடான அச்சு வழியே இருக்கும்.

உரு	நிறை	**O**இலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்துள்
உருளை	$\pi r^2 h\rho g$	$\frac{h}{2}$
கூம்பு	$\frac{1}{3}\pi r^2\frac{h}{2}\rho g$	$\frac{1}{4}\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{h}{8}$
எஞ்சிய உரு	$\frac{5}{6}\pi r^2 h\rho g$	OG



O பற்றி திருப்பம் எடுத்தால்,

$$\frac{5}{6}\pi r^2 h\rho g.\mathrm{OG} = \pi r^2 h\rho g\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}\pi r^2\left(\frac{h}{2}\right)\rho g.\left(\frac{h}{8}\right)$$

$$\frac{5}{6}.\mathrm{OG} = \frac{h}{2} - \frac{h}{48} = \frac{23h}{48}$$

$$\mathrm{OG} = \frac{23h}{40}$$

உதாரணம் 8

a ஆரையுள்ள திண்ம அரைக்கோளமும் h உயரமும் a அடிஆரையும் கொண்ட திண்மச் செவ்வட்டக கூம்பு ஒன்றும் அவற்றின் அடிகள் பொருந்துமாறு ஒரு கூட்டுடல் ஆக்கப்படுகின்றது. இக்கூட்டுடலானது ஒரு கிடைமேசைமீது அரைக்கோளத்தின் வளை பரப்பின் எப்புள்ளியும் தொடுகையிலுள்ளவாறு சமநிலையில் இருக்குமெனின் கூம்பின் அரையுச்சிக்கோணம் α இன் பெறுமதியைக் காண்க.

சமநிலைக்கு மேசையின் மறுதாக்கம் R உம் மொத்த நிறை $(w_1 + w_2)$ உம் தொடுகைப்புள்ளி யினூடான நிலைக்குத்துக் கோட்டில் சமனும் எதிருமாக இருப்பதுடன் மையம் O இனூடு செல்லும்.

O பற்றி திருப்பம் எடுத்தால்,

$$\mathrm{w}_1.\,\mathrm{OG}_1 - \mathrm{w}_2.\mathrm{OG}_2 = 0$$

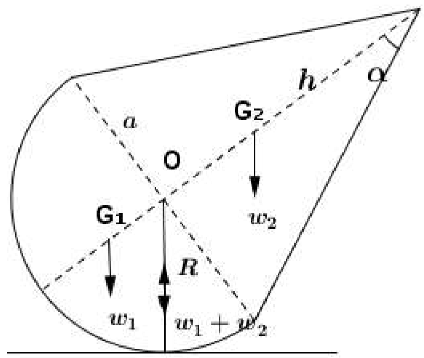
$$\frac{2}{3}\pi a^3\rho.\frac{3}{8}a - \frac{1}{3}\pi a^2 h\rho.\frac{1}{4}h = 0$$

$$3a^2 = h^2$$

$$\frac{a}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

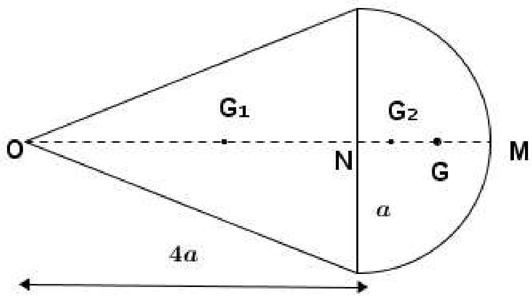
$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$



உதாரணம் 9

திணிவு அடர்த்தி ρ உம், அடி அரை a உம், உயரம் $4a$ உம் உடைய சீரான திண்ம செவ்வட்டக் கூம்பொன்றையும், அடி ஆரை a உம், திணிவு அடர்த்தி 4ρ ஐயும் கொண்ட சீரான திண்ம அரைக்கோளம் ஒன்றினையும், அவற்றின் அடிகள் ஒன்றுடன் ஒன்று பொருந்துமாறு வைக்கப்பட்டு விளையாட்டுப்பொருள் ஒன்று உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. பொது அடியின் மையத்திலிருந்து இவ்விளையாட்டுப்பொருளின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கான தூரத்தினைக் காண்க. இவ்விளையாட்டுப்பொருளானது கூம்புப் பகுதியில் வளைபரப்பு தரையை தொட்டுக் கொண்டிருக்குமாறு சமநிலையடைய முடியாது எனின், $\lambda > 20$ எனக் காட்டுக.



சமச்சீரால் பொம்மையில் புவியீர்ப்பு மையம் OM இலிருக்கும்.

உரு	நிறை	N இலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத் தூரம்
Cone	$\frac{1}{3}\pi a^2.4a.\rho g$	$NG_1 = -\frac{1}{4}.4a = -a$
Hemisphere	$\frac{2}{3}\pi a^3.\lambda\rho g$	$NG_2 = \frac{3a}{8}$
Toy	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho(2+\lambda)g$	NG

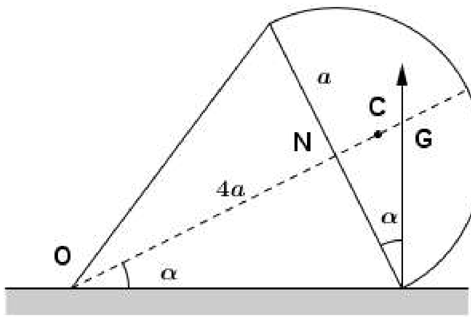
O பற்றி திருப்பம் எடுக்க.

$$\frac{2}{3}\pi a^3\rho(2+\lambda)g\ .\ NG = \frac{4}{3}\pi a^3\rho g(-a) + \frac{2}{3}\pi a^3\lambda\rho\ g.\frac{3a}{8}$$

$$(2+\lambda).NG = -2a + \frac{3a}{8}\lambda$$

$$NG = \frac{(3\lambda - 16)}{8(2+\lambda)}a$$

சமநிலை சாத்தியமாவதற்கு $NC < NG$



$$a\tan\alpha < \frac{(3\lambda-16)}{8(2+\lambda)}a$$

$$\frac{1}{4} < \frac{(3\lambda-16)}{8(2+\lambda)}$$

$$2(2+\lambda) < 3\lambda - 16$$

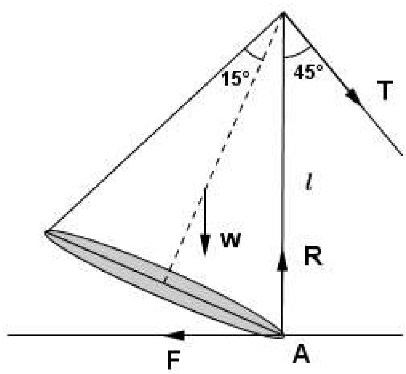
$$20 < \lambda$$

உதாரணம் 10

அரையுச்சிக்கோணம் 15° கொண்ட ஒரு சீரான செவ்வட்டக்கூம்பு அதன் அடி கரடான கிடைத்தளத்தில் அமையுமாறு சமநிலையில் உள்ளது. அதன் உச்சிக்கு இணைக்கப்பட்ட இலேசான நீளா இழையொன்றினால் கூம்பு ஒரு பக்கமாக சரிக்கப்படுகின்றது. இழையினால் கிடையுடன் 45° அமைக்குமாறு கூம்பின் அச்சினூடான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் கீழ் நோக்கி இழுக்கப்படுகின்றது. கூம்பின் உச்சியானது கூம்பின் தொடுகைப்புள்ளி பற்றி வழுக்கும் நிலையிலுள்ள இழுவை என்பவற்றை துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளை எழுதுக. இதிலிருந்து பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $T = \frac{3\sqrt{2}}{16}\text{W}$

(ii) உராய்வுக்குணகம் $\frac{3}{19}$



சமநிலைக்கு

A பற்றி திருப்பம் எடுத்தல்

$$\text{T}.\ell\sin 45^\circ - W.\frac{3}{4}h\sin 15^\circ = 0$$

$$\text{T}.h\sec 15^\circ.\sin 45^\circ - W.\frac{3}{4}h\sin 15^\circ = 0$$

$$\frac{\text{T}}{\sqrt{2}\cos 15^\circ} = \frac{3}{4}W\sin 15^\circ$$

$$\text{T} = \frac{3\sqrt{2}}{8}W\sin 30^\circ$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{16}W$$

நிலைக்குத்துத் திசையில்

$\uparrow$ R. Tcos 45° - W = 0

$$\text{R} = \frac{19}{16}W$$

கிடைத்திசையில்

$\leftarrow$ F - Tsin 45° = 0

$$\text{F} = \frac{3}{16}W$$

எல்லைச் சமநிலையில்,

$$\frac{F}{R} = \mu$$

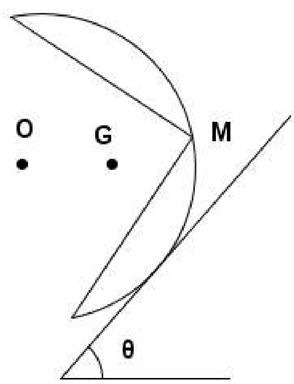
$$\mu = \frac{\frac{3}{16}W}{\frac{19}{16}W}$$

$$= \frac{3}{19}$$

உதாரணம் 11

a ஆரையுடைய ஒரு சீரான திண்ம அரைக்கோளத்திலிருந்து a அடி ஆரையும் a உயரமும் கொண்ட திண்மச் செவ்வட்டக்கூம்பு ஒன்று வெட்டி அகற்றப்பட்டு திண்ம உரு ஒன்று பெறப்படுகின்றது. கூம்பு, அரைக்கோளம் என்பவற்றின் அடிகள் O ஐ பொது மையமாகக் கொண்டு ஒன்றுடன் ஒன்று பொருந்துகின்றன. பெறப்படும் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தை O இலிருந்து காண்க.

தரப்பட்ட உருவானது மேற்குறிப்பிட்ட திண்மத்தின் குறுக்குவெட்டானது கிடையுடன் θ சாய்வுள்ள கரடான தளத்தில் அதன் வளைபரப்பு தொடுரகயிலுள்ளதனைக் காட்டுகின்றது. O, G என்பன அதியுயர் சரிவுக் கோட்டினூடான ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளன. OG கிடையாக உள்ளது. $\theta = 30°$ எனக் காட்டுக.



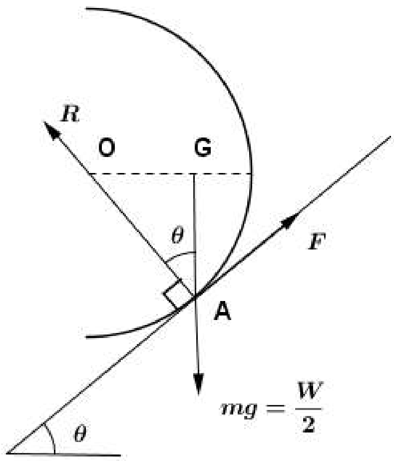
W என்பது அரைக்கோளத்தின் நிறை

தொடுபுள்ளியிலுள்ள உராய்வுவிசை செவ்வன் மறுதாக்கம் என்பவற்றிற்கான பெறுமானங்கள் W சார்பாகக் காண்க.

மேலும் தளத்திற்கும் திண்மத்திற்கு இடைப்பட்ட உராய்வுக் குணகத்தின் மிகக்குறைந்த பெறுமதியைக் காணிக்க.

உரு	நிறை	O இருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தளம்
அரைக்கோளம்	$\frac{2}{3}\pi a^3 \mathrm{W}$	$\frac{3}{8}a$
கூம்பு	$\frac{1}{3}\pi a^2 .a\mathrm{W}$	$\frac{1}{4}a$
எஞ்சிய உரு	$\frac{2}{3}\pi a^3 \mathrm{W}$	OG

O பற்றி திருப்பம் எடுப்பின்,



$$\frac{1}{3}\pi a^3 W.\text{OG} = \frac{2}{3}\pi a^3 W.\frac{3}{8}a - \frac{1}{3}\pi a^3 W.\frac{1}{4}a$$

$$\text{OG} = \frac{6}{8}a - \frac{1}{4}a$$

$$= \frac{a}{2}$$

உடலின் சமநிலைக்கு,

F, R, $\frac{\text{W}}{2}$ என்பன A இனூடு செல்லவேண்டும்.

$$\therefore \sin\theta = \frac{\text{OG}}{\text{OA}}$$

$$= \frac{\frac{a}{2}}{a}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\theta = 30°$$

தளத்திற்கு சமாந்தரமாக விசைகளை துணிக்க.

$$\nearrow \quad \text{F} - \frac{W}{2}\sin\theta = 0$$

$$\text{F} = \frac{W}{2}\sin\theta$$

$$= \frac{W}{2}\sin 30°$$

$$= \frac{W}{4}$$

தளத்திற்கு செங்குத்தாக விசைகளை துணிக்க.

$$\nwarrow \quad \text{R} - \frac{W}{2}\cos\theta = 0$$

$$\text{R} = \frac{W}{2}\cos\theta$$

$$= \frac{W}{2}\cos 30°$$

$$= \frac{W\sqrt{3}}{4}$$

எல்லைச் சமநிலைக்கு,

$$\frac{F}{R} \le \mu$$

$$\frac{\frac{W}{4}}{\frac{W\sqrt{3}}{4}} \le \mu$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \le \mu$$

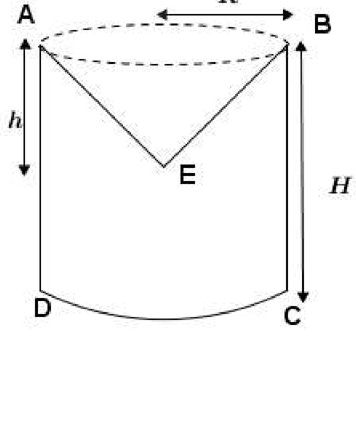
$$\mu_{\min} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

உதாரணம் 12

தரப்பட்ட உருவானது திண்மச் செவ்வட்ட உருளை ABCD இலிருந்து H உயரமும் R, ஆரையும் கொண்டது. h உயரமும் அடியாரை R கொண்ட கூம்பு குடைந்து அகற்றப்பட்டபின் பெறப்பட்ட உருவாகும். AB யிலிருந்து S இன் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. இதிலிருந்து S இன் புவியீர்ப்புமையம் E இல் இருப்பின் $h = \left(2 - \sqrt{2}\right)H$. எனக் காட்டுக. எஞ்சிய உரு S ஆனது கிடையுடன் α சாய்வுள்ள $\alpha\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ சாய்தளத்தின் மீது அடி DC தளத்திலுள்ளவாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. தளமானது S வழுக்குவதனைத் தடுப்பதற்கு போதிய கரடானதாகும் S இன் புவியீர்ப்பு மையம் E இலுள்ளதெனக் கொண்டு $R\cot\alpha > \left(\sqrt{2} - 1\right)H$ எனின் S கவிழாது எனக் காட்டுக.

சமச்சீரினால் S இன் புவியீர்ப்புமையமானது உருளையின் அச்சின் வழியே இருக்கும்.

உரு	நிறை	AB இருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தூரம்
உருளை	$\pi R^2 HW$	$\frac{H}{2}$
கூம்பு	$\frac{1}{3}\pi R^2 hW$	$\frac{h}{4}$
எஞ்சிய உடல்	$\pi R^2\left(H - \frac{h}{3}\right)W$	$\bar{y}$



AB பற்றி திருப்பம் எடுப்பின்,

$$\pi R^2\left(H - \frac{h}{3}\right)W\ \bar{y} = \pi R^2 H\, W.\ \frac{H}{2} - \frac{1}{3}\pi R^2 hW.\frac{1}{4}h$$

$$\left(H - \frac{h}{3}\right)\ \bar{y} = \frac{H^2}{2} - \frac{h^2}{12}$$

$$\bar{y} = \frac{6H^2 - h^2}{4(3H - h)}$$

புவியீர்ப்பு மையம் E இல் இருப்பின், $\bar{y} = h$

$$h = \frac{6H^2 - h^2}{4(3H\text{-}h)}$$

$$\Rightarrow 3h^2 - 12Hh + 6H^2 = 0$$

$$h^2 - 4Hh + 2H^2 = 0$$

$$(h - 2H)^2 - 2H^2 = 0$$

$$\left(h - 2H + \sqrt{2}H\right)\left(h - 2H - \sqrt{2}H\right) = 0$$

$$h = 2H - \sqrt{2}H\ ,\quad 2H + \sqrt{2}H$$

$$\Rightarrow h < H \Rightarrow h = 2H - \sqrt{2}H$$

$$= \left(2 - \sqrt{2}\right)H$$

KM < DM எனின், உடல் கவிழாது

$$(H - h)\tan\alpha < R$$

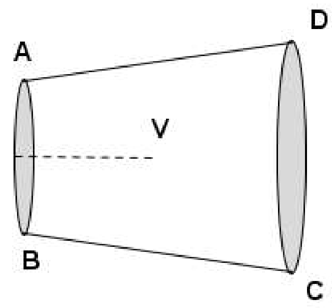
$$(H - h) < R\cot\alpha$$

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)H < R\cot\alpha$$

உதாரணம் 13

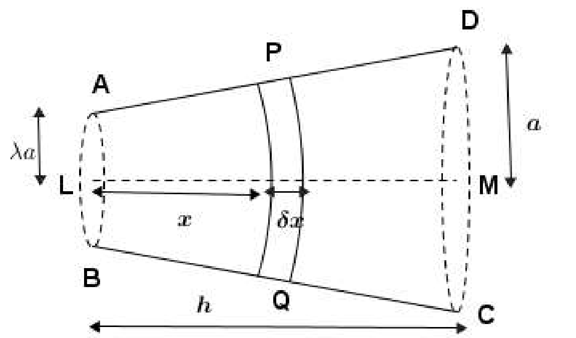
தரப்பட்ட உரு h உயரம் கொண்டதும் ρ அடர்த்தியுமுடைய ABCD இனால் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. அடித்துண்ட வட்ட முகங்களின் விட்டங்கள் $AB = 2a\lambda$, $CD = 2a$ ஆகும். இங்கு λ ஒரு பரமானம் $0 < \lambda < 1$.

தொகையீட்டின் மூலம் இவ்வடித்துண்டத்தின் திணிவு $\frac{1}{3}\pi a^2 h\rho(1+\lambda+\lambda^2)$ திணிவு மையமானது சிறியமுகத்தின் மையத்திலிருந்து $\frac{h}{4}\left(\frac{3+2\lambda+\lambda^2}{1+\lambda+\lambda^2}\right)$ தூரத்தில்லிருக்கும் எனக் காட்டுக.



இதிலிருந்து a ஆரையும் h உயரமும் கொண்ட சீரான திண்ம செவ்வட்க்கூம்பு ஒன்றின் திணிவு, திணிவுமையம் என்பனவற்றை உய்த்தறிக.

அடித்துண்டம் ABCD இல் இருந்து அடியாரை λa உம் $\frac{h}{2}$ உயரமும் கொண்ட VAE என்ற நேர் செவ்வட்டக்கூம்பு குடைந்து அகற்றப்படுவதன்மூலம் திண்ம உரு J பெறப்படுகின்றது. J இன் திணிவுமையம் G இன் நிலையைக் கண்டு G_1 ஆனது V உடன் பொருந்தாது என்பதனை வாய்ப்புப்பார்க்க. உடல் J ஆனது அதன் பெரிய முகத்தின் பரிதியிலுள்ள புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்படும்போது சமநிலையில் J இன் சமச்சீர் அச்சு நிலைக்குத்துடன் b கோணத்தை ஆக்குமெனின் $\tan\beta = \frac{8a}{h}\left(\frac{2+2\lambda+\lambda^2}{4+8\lambda+5\lambda^2}\right)$.



$$\frac{x}{r-\lambda a} = \frac{h}{a(1-\lambda)}$$

$$r-\lambda a = \frac{a(1-\lambda)}{h}x$$

$$r = \frac{a(1-\lambda)}{h}x + \lambda a$$

வட்டத்தட்டு PQ இன் உயரம் δx, AB இல் இருந்தான தூரம் x ஐ கருதின்.

PQ இன் கனவளவு $= \pi r^2 \delta x$

PQ இன் திணிவு $= \pi r^2 \delta x \rho$

$$= \int_0^h \pi r^2 dx \rho$$

$$= \int_0^h \pi . \left[\frac{a(1-\lambda)x}{h} + \lambda a \right]^2 dx \rho = \pi \rho \left| \frac{\left[\frac{a(1-\lambda)x}{h} + \lambda a \right]^3}{3a \frac{(1-\lambda)}{h}} \right|_0^h$$

$$= \frac{\pi \rho}{3} \frac{h}{a(1-\lambda)} \left\{ \left[a(1-\lambda) + \lambda a \right]^3 - (\lambda a)^3 \right\}$$

$$= \frac{\pi \rho}{3} \frac{h a^3 (1-\lambda^3)}{a(1-\lambda)} = \frac{\pi}{3} a^2 h \rho \frac{(1-\lambda^3)}{(1-\lambda)}$$

$$\mathrm{M} = \frac{\pi}{3} a^2 h (1 + \lambda + \lambda^2) \rho \text{..........................(1)}$$

சமச்சீரின் படி புவியீர்ப்பு மையம் G, மையங்களை இணைக்கும் புள்ளி LM இன் மீது கிடக்கும்.

$$\mathrm{M.\ LG} = \int \pi r^2 \delta x \rho . x$$

$$\mathrm{LG} = \frac{\int_0^h \pi \rho \left[\frac{a(1-\lambda)}{h} x + \lambda a \right]^2 x dx}{\mathrm{M}}$$

$$= \frac{\pi \rho}{\mathrm{M}} \int_0^h \left[\frac{a^2 (1-\lambda)^2}{h^2} x^3 + \frac{2\lambda a^2}{h} (1-\lambda) x^2 + \lambda^2 a^2 x \right] dx$$

$$= \frac{\pi \rho}{\mathrm{M}} \left[\frac{a^2 (1-\lambda)^2}{h^2} \frac{x^4}{4} + 2\lambda \frac{a^2}{h} (1-\lambda) \left(\frac{x^3}{3} \right) + \lambda^2 a^2 \frac{x^2}{2} \right]_0^h$$

$$= \frac{\pi \rho}{\mathrm{M}} \left[\frac{a^2 (1-\lambda)^2}{h^2} \frac{x^4}{4} + 2\lambda \frac{a^2}{h} (1-\lambda) \left(\frac{x^3}{3} \right) + \lambda^2 a^2 \frac{x^2}{2} \right]$$

$$= \frac{\pi \rho}{\mathrm{M}} h^2 a^2 \left[\frac{(1-\lambda)^2}{4} + \frac{2}{3} \lambda (1-\lambda) + \frac{\lambda^2}{2} \right]$$

$$= \frac{\pi a^2 h^2 \rho}{\mathrm{M}} \left[\frac{3(1 - 2\lambda + \lambda^2) + 8\lambda + 8\lambda^2 + 6\lambda^2}{4 \times 3} \right]$$

$$= \frac{\pi a^2 h^2 \rho}{12M}\left(\lambda^2 + 2\lambda + 3\right)$$

$$= \frac{\pi a^2 h^2 \rho}{12} \frac{\left(\lambda^2 + 2\lambda + 3\right)}{\frac{\pi}{3} a^2 h\left(1 + \lambda + \lambda^2\right)\rho}$$

$$= \frac{h}{4}\left(\frac{\lambda^2 + 2\lambda + 3}{\lambda^2 + \lambda + 1}\right) \qquad ....(2)$$

$\lambda = 0$ போது அடித்துண்டமானது h உயரமும் அடிஆரை a ஐயும் உடைய ஒரு கூம்பாக மாறும்.

$\therefore$ கூம்பின் திணிவு $= \frac{1}{3}\pi a^2 h\rho$ (1) இலிருந்து $\lambda = 0$

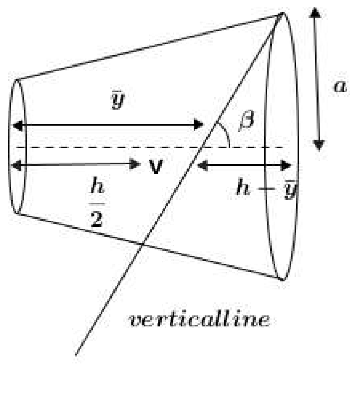
உச்சியிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தூரம் $\frac{h}{4}.\frac{3}{1} = \frac{3h}{4}$ ((2) இலிருந்து $\lambda = 0$)

J இன் புவியீர்ப்புமையம் காணல்.

உரு	நிறை	AB இலிருந்து புவியீர்ப்பு மைய தூரம்
அடித்துண்டம்	$\frac{1}{3}\pi a^2 \rho g(1+\lambda+\lambda^2)h$	$\frac{h}{4}\left(\frac{\lambda^2 + 2\lambda + 3}{\lambda^2 + \lambda + 1}\right)$
கூம்பு VAB	$\frac{1}{3}\pi\left(\lambda a\right)^2 \rho g \frac{h}{2}$	$\frac{1}{4}.\frac{h}{2} = \frac{h}{8}$
எஞ்சிய உரு J	$\frac{1}{3}\pi a^2 h\rho g\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right)$	$\bar{y}$

L பற்றி திருப்பம் எடுப்பின்,

$$\frac{1}{3}\pi a^2 h\rho g\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right)\bar{y} = \frac{1}{3}\pi a^2 \rho g\left(1 + \lambda + \lambda^2\right).\frac{h}{4}\left(\frac{\left(\lambda^2 + 2\lambda + 3\right)}{\lambda^2 + \lambda + 1}\right) - \frac{1}{3}\pi a^2 \lambda^2 \rho \frac{h}{2} g.\frac{h}{8}$$



$$\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right)\bar{y} = \frac{h}{4}\left(\lambda^2 + 2\lambda + 3\right) - \frac{h\lambda^2}{16}$$

$$\bar{y} = \frac{h}{8}\left(\frac{3\lambda^2 + 8\lambda + 12}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}\right)$$

$$\bar{y} - \frac{h}{2} = \frac{h}{8}\left(\frac{3\lambda^2 + 8\lambda + 12}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}\right) - \frac{h}{2}$$

$$= \frac{h}{8}\left[\frac{3\lambda^2 + 8\lambda + 12 - 4\left(\lambda^2 + 2\lambda + 2\right)}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}\right]$$

$$= \frac{h}{8}\left(\frac{4 - \lambda^2}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}\right) > 0 \qquad (\because 0<\lambda<1)$$

$\therefore$ புள்ளி V ஆனது G_1 உடன் பொருந்தாது,

$$\tan\beta = \frac{a}{h-\bar{y}}$$

$$h-\bar{y} = h - \frac{h}{8}\left(\frac{3\lambda^2+8\lambda+12}{2+2\lambda+\lambda^2}\right)$$

$$= \frac{h}{8}\left(\frac{5\lambda^2+8\lambda+4}{2+2\lambda+\lambda^2}\right)$$

நிலைக்குத்து

8.4 பயிற்சி

1. Δ ABC இலிருந்து Δ ADE அகற்றப்படுகின்றது. இங்கு DE //BC உம் $\Delta ADE = \frac{1}{2}\Delta ABC$ உம் ஆகும். BC இலிருந்து எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தை, தூரத்தைக் காண்க.

2. Δ ABC இல் இருந்து Δ ADE என்ற பகுதி அகற்றப்படுகின்றது. இங்கு DE// BC. A இலிருந்து BC, DE என்பவற்றிற்கான தூரங்கள் முறையே a, b எனின் BC இலிருந்து மீதிப் பகுதிக்கான புவியீர்ப்பு மையத்தூரம் $\frac{a^2+ab-2b^2}{3(a+b)}$ எனக் காட்டுக.

3. *a, b, c* நீளம் கொண்ட 3 சீரான கோல் ஒரு முக்கோணியை அமைக்குமாறு அவற்றின் முனைகளில் மூட்டப்படுள்ளன. இம்முக்கோணியின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

4. Δ ABC ஒரு சீரான முக்கோண அடராகும். இதிலிருந்து இம்முக்கோணியின் உள்விட்டப் பகுதி அகற்றப்படுகின்றது. BC இலிருந்து எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் $\frac{S}{3as}\left[\frac{2s^3-3\pi aS}{s^2-\pi S}\right]$ எனக் காட்டுக. இங்கு S என்பது அடரின் பரப்பும் s என்பது அடரின் சுற்றளவின் அரைப்பங்கும் ஆகும். $BC = a$.

5. ACB என்பது AOB ஐ விட்டமாகவும் OC ஐ AB இற்குச் செங்குத்தான ஆரையாகவும் கொண்ட சீரான அரைவட்ட அடராகும் வட்டத்தின் ஆரை a. P ஆனது OB இல் அமையக்கூடியவாறும் OP = $=\frac{a}{2}$ ஆகுமாறுள்ள ஒரு சதுரப்பகுதி OPQR அடரிலிருந்து வெட்டி அகற்றப்பட்டால் OB, OC என்பவற்றிலிருந்து எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. இதிலிருந்து எஞ்சிய பகுதியானது A இலிருந்து சமநிலையில் கட்டி தொங்கவிடப்படும்போது AB நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் கோணத்தின் தான்சன் $\frac{1}{2}$ இல் குறைவாகும் எனக்காட்டுக.

6. ABCDEF என்பது ஒரு ஒழுங்கான அறுகோணி வடிவில் அமைந்த ஒரு அடர். Δ ABC என்ற பகுதி வெட்டி எடுக்கப்பட்டு Δ DEF என்றமுக்கோணியின் மீது ஒட்டப்படும்போது பெறப்படும் உருவின் பவியீர்ப்பு மையமானது $\frac{2a}{9}$ தூரத்தால் நகர்த்தப்படும் என நிறுவுக. இங்கு a என்பது அறுகோணியின் ஒருபக்க நீளமாகும்.

7. a ஆரைகொண்ட சீரான அரைவட்ட அடர் ஒன்றின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து $\dfrac{4a}{3\pi}$ தூரத்தில் இருக்கும் என நிறுவுக.

$2a$ ஆரையுடைய சீரான ஒரு அரைவட்ட அடரின் அடி AOB ஆகும். O என்பது மையம். அடி 40 ஆகவும் ஆரை a ஆகவும் உடைய ஒர அரைவட்ட அடர் வெட்டி அகற்றப்பட்டு எஞ்சிய பகுதி A இலிருந்து தொங்கவிடப்படுகின்றது. சமநிலையில் AOB நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

8. ஒரே அடியைக் கொண்ட ஒரு நேர் செவ்வட்டக் கூம்பும் ஒரு செவ்வட்ட உருளையும் அவற்றின் அடிகள் பொருந்துமாறு இணைக்கப்பட்டு கூட்டுரு ஆக்கப்படுகின்றது. இக்கூட்டுருவின் புவியீர்ப்பு மையமான அவற்றின் பொது அடியில் அமையும் எனின் கூம்பின் உயரத்திற்கும் உருளையின் உயரத்திற்குமுள்ள விகிதத்தைக் காண்க.

9. ஒரு திண்மச் செவ்வட்ட கூம்பின் அடிப்பகுதி துளைக்கப்பட்டு அதே அடியை உடைய ஒரு பகுதி பொள்ளாக்கப்பட்ட ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பு பெறப்படுகின்றது. எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையமானது பொட்கூம்பின் உச்சியில் அமையுமெனில் எவ்வளவு உயரம் துளைக்கப்படவேண்டும் எனக் காண்க.

10. 60° உச்சிக்கோணமுடைய நேர் செவ்வட்டக்கூம்பு ஒன்றிலிருந்து அதிகூடிய ஆரை கொண்ட ஒரு கோளம் வெட்டி அகற்றப்படுகின்றது. எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்புமையம் அச்சினை 11 : 49 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது எனக் காட்டுக.

11. h உயரமுடைய ஒரு நேர் செவ்வட்டக்கூம்பு ஆனது உயரத்தில் அச்சுக்கு $\dfrac{h}{2}$ உயரத்தில் அச்சுக்குச் செங்குத்தான தளம் ஒன்றினால் வெட்டி அகற்றப்படுகின்றது. பெறப்படும் அடிக்கண்டம் (Frustum) இன் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

பெறப்படும் அடிக்கண்டத்தின் சிறிய வட்ட மேற்பரப்பின் விளிம்பிலிருந்து தொங்கவிடப்படின் அடியின் விட்டம் கிடையுடன் அமைக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

12. தவிர்க்கப்படத்தக்க தடிப்பு கொண்டதும் s பரப்படர்த்தி கொண்டதுமான பதார்த்தத்தி னால் செய்யப்பட்ட ஒரு நேர் செவ்வட்ட பொட்கூம்பானது இக்கூம்பின் ஆரைக்கு சம ஆரைகொண்ட ஒரு அரைக்கோணத்தின் விளிம்புடன் பொருத்தப்படுகின்றது. இக்கூட்டுருவானது கூம்பின் பிறப்பாக்கி அழுத்தமான கிடைத்தரையுடன் பொருந்துமாறு r k e p y a p ; c s s J . $ k g p l ; m i u A r r p Nf hz k ; $\rho(\cot^2\alpha + 3) = 3\sigma(\cos\alpha - 2\sin\alpha)$ என்ற சமன்பாட்டால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

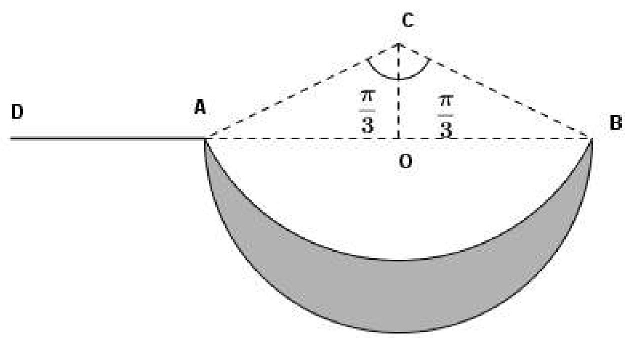
13. உச்சி O, அரையுச்சிக்கோணம் α, உயரம் h என்பனவற்றைக் கொண்ட அடியற்ற ஒரு பொட்கூம்பானது அலகுப் பரப்பிற்கு σ திணிவு கொண்ட ஒரு உலோகத்தாள் ஆக்கப்பட்டுள்ளது. இதன் திணிவு $\pi\sigma h^2 \sec\alpha \tan\alpha$ எனக்காட்டி அதன் திணிவு மையத்தையும் காண்க.

மையம் B ஆரை $h\tan\alpha$ ஐக் கொண்டதும் அதே உலோகத்தாளினால் ஆக்கப்பட்டதுமான சீரான வட்டத் திட்டிலான முடி ஆக்கூம்பிற்குப் பொருத்தப் படுகின்றது. O விலிருந்து கூட்டுடலின் புவியீர்ப்பு மையமானது $\dfrac{h\left(\frac{2}{3}\sec\alpha+\tan\alpha\right)}{(\sec\alpha+\tan\alpha)}$ எனக் காட்டுக.

இக்கூட்டுடலானது வட்ட விளிம்பிலுள்ள புள்ளி A தொங்கவிடப்படும்போது AO, AB என்பன கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் சமகோணங்களை ஆக்கினால் $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ எனக் காட்டுக.

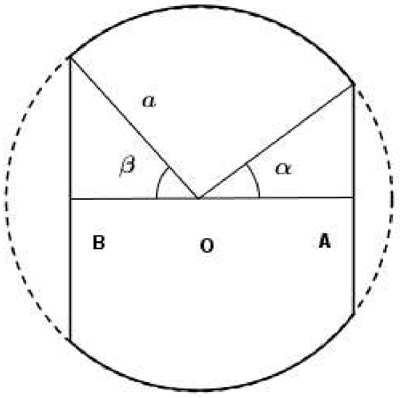
14. பிறைவடிவில் அமைந்த ஒரு சீரான அடர் O ஐ மையமாகவும் a ஆரைகொண்ட அரைவட்ட அடராலும் ஆரை a, உடையதும் மையம் C இல் என்ற $\frac{2\pi}{3}$ கோணத்தை எதிரமைக்கும் வில்லாலும் ஆக்கப்பட்டுள்ளது. (படத்திற் காட்டப்பட் டுள்ளது.)

இவ்வடரின் புவியீர்ப்பு மையமானது C இலிருந்து $\mathrm{k}a$ தூரத்திலுள்ளது எனக் காட்டுக. இங்கு $\mathrm{k}=\dfrac{3\sqrt{3}\pi}{\pi+6\sqrt{3}}$.



அடரின் திணிவு M என்க. திணிவு m உம் நீளம் $2a$ உம் கொண்ட சீரான கோலின் AD இன் முனை A இல் BA வழியே விறைப்பாகப் பிணைக்கப்பட்டு படத்திற் காட்டியவாறு ஒரு sickle ஆக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த sickle ஆனது பிறைப்பகுதி நிலைக்குத்தாகவும் D அரைவட்டப் பகுதி என்பன நிலத்தைத் தொடக்கூடியவாறும் ஒரு கிடைத்தரையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. உரு சமநிலையில் இருப்பின் $\mathrm{M}\left(\sqrt{3}-1\right)<4\sqrt{6}\mathrm{m}$ எனக் காட்டுக.

15. a ஆரையும் மையம் O ஐயும் பரப்படர்த்தி r உம் கொண்ட ஒரு சீரான கோள ஓட்டின் மையத்திலிருந்து $a\cos\alpha, a\cos\beta$ தூரங்களிலுள்ள இரு சமாந்தர தளங்களினால் (O இன் இருபக்கமும் உள்ள) வெட்டிப் பெறப்பட்ட உரு படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. $O < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$



தொகையீட்டின் மூலம்

(i) பெறப்பட்ட வலயத்தின் திணிவு $2\pi a^2\sigma(\cos\alpha + \cos\beta)$ எனக் காட்டுக.

(ii) பெறப்பட்ட வலயத்தின் திணிவு மையம் சமச்சீர் அச்சிலும் A, B இலிருந்து நடுவே உள்ள புள்ளியில் A யுள்ள பக்கமாக இருக்கும் எனக் காட்டுக.

தற்போது $a\sin\beta$ ஆரையுடையதும் பரப்படர்த்தி σ உடையதுமான வட்டத்தட்டு பெரிய வட்ட விளிம்பிற்கு வட்டத்தட்டின் மையம் B இணைக்கப்படுகின்றது. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos\beta}$ எனின் கூட்டுடலானது கோளமேற்பரப்பின் எப்புள்ளியிலும் தொடுகையிலுள்ள கிடைத்தரையில் சமநிலையில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

16. தொகையீட்டுமுறைமூலம் a ஆரையுடையதும் σ பரப்படர்த்தியும் கொண்ட பொள் அரைக்கோள ஓட்டின் மையத்திலிருந்து $a\cos\alpha$ தூரத்தில் கோள ஓட்டின் விளிம்பிற்கு சமாந்தரமான தளத்தினால் வெட்டப்பட்டு பெறப்படும் அடிக்கண்டத்தின் (Frustum) புவியீர்ப்பு மைய OC இன் நடுப்புள்ளியில் இருக்கும் எனக்காட்டுக. இங்கு C என்பது சிறிய வட்டவிளிம்பின் மையம்.

மேலுள்ள அடிக்கண்டத்தின் (frustum) சிறிய விளிம்பிற்கு $a\sin\alpha$ ஆரையுடையதும் அதே பரப்படர்த்தி σ கொண்டதுமான ஒரு வட்டத்தட்டு விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டு ஒரு கிண்ணம் ஆக்கப்படுகின்றது. இக்கிண்ணத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் OC இல் அமையும் எனவும் O இலிருந்து $\left(\frac{1+\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha-\cos^2\alpha}\right)a\cos\alpha$ தூரத்திலும் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

$a=\frac{\pi}{3}$ ஆயும் W என்பது கிண்ணத்தின் நிறை W எனவும் கொள்க. O, A, B என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் இருக்கத்தக்கவாறு நீளம் b யும் நிறை $\frac{\pi}{4}$ உம் கொண்ட சீரான கோல் AB கிண்ணத்தின் விளிம்பிற்கு இணைக்கப்பட்டு ஒரு Sauce pan உருவாக்கப்படுகின்றது. (படத்திற் காட்டப்பட்டுள்ளது.) Sauce pan இன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலையைக் காண்க. இந்த Sauce pan ஆனது முனை B இலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்படும்போது கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$ என்ற கோணத்தை ஆக்கினால் $3b=4a$ எனக்காட்டுக.